UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

CONDICIONES DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES PARA EL MODELO DE CRECIMIENTO ECONOMICO DE JOHN VON NEUMANN

por:

MANUELA FOSTER DE MARTINEZ

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Matemática

Panamá, 1986

TM

UNIVERSIDAD DE PANAMA

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Aprobado por

Director de Tesis ______________________

José Del Rosario Garrido N., Ph. D.

Miembro del Jurado ______________________

Jorge Rojo M., Ph. D.

Miembro del Jurado ______________________

Carlos Sánchez, Ph. D.

Fecha 4 de febrero de 1986

Obs. del autor

D E D I C A T O R I A

Dedico este trabajo a mi mamá Pancha, de quien siempre recibí apoyo y una voz de aliento en los momentos en que más lo necesité y a mis hijos Iván Oscar y Annya Linette, fuerzas motivadoras de todos mis actos.

Lita

A G R A D E C I M I E N T O

Una obra de esta naturaleza puede transmitir un mensaje completo y cumplir con el objetivo de servir como escalón hacia la investigación a los más altos niveles, si cuenta con la dirección de una persona calificada y tenaz. Tuve la gran suerte de encontrar en mi profesor y amigo Dr. JOSE DEL R. GARRIDO esas y otras cualidades que, en su conjunto, hicieron que este trabajo de tesis tuviera un feliz término. A él ... gracias.

A mi esposo OSCAR, quien me alentó y mostró gran comprensión durante todos mis estudios y brindó su ayuda en la confección de este trabajo.

A mis compañeras MAYRA, EYDA Y MIRTA con quienes compartí momentos de alegría, tensión y trabajo, y cuyos aportes fueron valiosos en la primera etapa de esta tesis.

A todos los profesores del PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA que contribuyeron a elevar mi formación matemática.

A las autoridades universitarias que nos brindaron la oportunidad de realizar estudios superiores en nuestro país y a la señora HILMA VILLA, quien con tanto esmero se dedicó al trabajo mecanográfico de esta tesis.

Gracias.

C O N T E N I D O

INTRODUCCION

Nuestro estudio está dirigido primordialmente a determinar, como bien lo expresa su título, las condiciones de existencia de soluciones del modelo de John von Neumann.

La evolución de los sistemas de los que nos ocuparemos, tiene lugar a lo largo de ciertas trayectorias (series de puntos en el espacio de las fases) admisibles desde el punto de vista tecnológico. Las restricciones tecnológicas dan a estos sistemas una estructura convexa, razón por la cual el aparato matemático que utilizaremos será el análisis convexo en un espacio de dimensión finita.

El trabajo comprende dos capitulos: en el primero, con la definición del concepto de tecnología y de la función de valor, se logra el estudio de las condiciones de existencia de soluciones para el dual de un problema cualquiera de optimización cóncava con una entrada dada y con óptimo, en el que se desee la maximización de utilidades. Estas mismas condiciones son interpretadas en el problema de existencia de soluciones duales de un problema de programación cóncava con término libre fijado que tiene solución óptima y particularizando aún más, adaptamos el estudio de estas condiciones al caso de la programación lineal.

Finalmente ofrecemos una interesante interpretación económica del problema de programación cóncava que obliga al matemático a apreciar más estas nociones, dada la importancia de su aplicación. Esta interpretación abarca todos los aspectos del problema.

En el segundo capitulo, luego de describir el modelo de von Neumann, se demuestra que bajo ciertas condiciones, existe solución. Posteriormente, definiendo una Tecnología von Neumann, se demuestra la existencia de soluciones de equilibrio bajo nuevas condiciones. Utilizando las nociones de matriz no- fraccionable y de valores y vectores propios de una matriz, demostramos la existencia de soluciones en el modelo de Leontief, como caso particular del modelo de von Neumann. Finalizamos el capítulo analizando el concepto de crecimiento eficiente de los niveles de intensidad de los procesos en el modelo de von Neumann, concibiendo el sistema económico en toda su planificación.

En el seminario de Tópicos (principios de 1984, tercer semestre del programa de Maestría) tratamos diferentes disciplinas de Matemática Aplicada, lo cual enriqueció nuestra cultura matemática permitiéndonos escoger el tema que más se acoplara a nuestra propia tendencia. Esta ardua y fructífera labor nos permitió comenzar el seminario de tesis (mediados de 1984, último semestre del programa), trabajando en nuestros temas particulares. Este seminario resultó una actividad de equipo en la que se conjugaron todas las opiniones de nuestro grupo en torno a los trabajos, cuyos avances se exponían semanalmente. Finalizado el semestre, cada uno de los participantes tenía bien establecido, al menos, un bosquejo general de su trabajo. Entramos entonces en la fase de profundizar aspectos matemáticos específicos con ayuda de bibliografía especializada. En los últimos seis meses nos ocupamos de pulir o refinar el contenido con un horario estricto de discusiones y consultas con el Director de Tesis.

Si bien es cierto que esta tesis no representa el final de nuestra investigación, también es cierto que con ella concluimos la fase más importante del inicio de nuestra futura actividad en el campo de la Matemática Aplicada.

Por último, deseamos precisar que siendo nuestro trabajo una tesis de Matemática, es dirigida al interesado en profundizar las aplicaciones de ésta en Economía y que para una documentación en lo que respecta a la importancia económica y los límites de los modelos de tipo von Neumann existen otros trabajos, como por ejemplo [7], [11] y [2].

N O T A C I O N E S

Para los elementos x e y de $\mathbb{R}_m$:

$x \geqslant y$ si $x_i \geqslant y_i$, $i=1,2,\ldots,m$;

$x > y$ si $x \geqslant y$ y $x \neq y$;

$x \gg y$ si $x_i > y_i$, $i=1,2,\ldots,m$;

x es no negativo si $x \geqslant 0$;

x es semipositivo si $x > 0$;

x es positivo si $x \gg 0$;

$$\| x \| = \sum_{i=1}^{m} \left| x_i \right|$$

Además, $\mathbb{R}_m^+ = \left\{ x / x \in \mathbb{R}_m, \quad x \geqslant 0 \right\}$

CAPITULO I

CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES DUALES EN LA PROGRAMACION CONCAVA E INTERPRETACION ECONOMICAS

Introducción

En el estudio de los sistemas económicos, cuya abstracción se enmarca, generalmente, en la programación cóncava, la teoria de dualidad juega un papel fundamental.

Esta teoria orientada hacia la aplicación se debe a D.Gale y A.M. Gooffrion, y su principal objetivo es la obtención de condiciones bien generales para que, en una clase particular de problemas, el teorema de Kuhn-Tucker funcione.

1.1.- Maximización de utilidades asignadas a un sistema económico con respecto a una entrada dada.

En un sistema económico, para producir n tipos de bonos (de salida) se utilizan m tipos de bonos (de entrada). El concepto de bono tiene una vasta esfera de comprensión, incluyendo fondos de producción, fuerza laboral, recursos naturales, servicios, etc. Consideraremos a cada vector m dimensional como una colección de bonos de entrada y a cada vector n dimensional como una colección de bonos de salida. La componente i-ésima de cada vector designará la cantidad de bonos de tipo i existente en esta colección.

Definición 1.1.1. Llamaremos tecnología del sistema, y la denotaremos T, $T \subset \mathbb{R}_m x \mathbb{R}_n$, al conjunto de las transformaciones posibles de bonos de entrada en bonos de salida. Supondremos que T es convexo y a cada elemento de T lo llamaremos proceso de producción o proceso.

Definiremos en T una función cóncava denotada u, tal que para $(x,y) \in T$, $u(x,y)$ designe la utilidad obtenida por la realización del proceso (x,y).

La mayor utilidad que se puede obtener, dada una entrada $\bar{z}$, está determinada por el proceso que sea solución óptima del problema

$$P \begin{cases} \text{Max } u(x,y) \\ \text{sujeto a } \quad (x,y) \in T \\ \qquad\qquad\qquad x = \bar{z} \end{cases}$$

que llamaremos primal.

Estudiaremos este problema desde el punto de vista de sus condiciones de optimalidad; su dual Lagrangeano es el siguiente problema:

$$D \begin{cases} \text{Min } \left[\varphi(\lambda) = \sup_{(x,y)\in T} \left(u(x,y) - \lambda(x-\bar{z}) \right) \right] \\ \\ \text{sujeto a } \quad \lambda \in \mathbb{R}_m \end{cases}$$

<u>Observación 1.1.1</u>. Los problemas P y D siempre tienen valores optimales. Convendremos en que un supremo tomado de un conjunto vacío es $-\infty$, y así P admitirá el valor $-\infty$ como optimal.

<u>Teorema 1.1.1</u>. Si $(\hat{x}, \hat{y})$ es solución admisible del problema P y si $\hat{\lambda}$ es solución admisible del dual D, entonces la función objetivo del dual evaluada en $\hat{\lambda}$ es por lo menos igual a la función objetivo del primal evaluada en $(\hat{x}, \hat{y})$.

Demostración: Como $\hat{x} = \bar{z}$, entonces $\hat{\lambda}(\hat{x}-\bar{z}) = 0$, de donde

$$\varphi(\hat{\lambda}) = \sup_{(x,y)\in T} \left[u(x,y) - \hat{\lambda}(x-\bar{z})\right] \geqslant u(\hat{x},\hat{y}) - \hat{\lambda}(\hat{x} - \bar{z})$$

luego $\varphi(\hat{\lambda}) \geqslant u(\hat{x},\hat{y})$.

Definición 1.1.2. Diremos que la terna (x^*, y^*, λ^*) elemento de $\mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_m$ satisface las condiciones de optimalidad para P si:

a) (x^*, y^*) es solución admisible de P.

b) (x^*, y^*) maximiza a $\left[u(x,y) - \lambda^*(x-\bar{z})\right]$ sobre T.

El siguiente teorema es consecuencia directa del anterior:

Teorema 1.1.2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) La terna (x^*, y^*, λ^*) satisface las condiciones de optimalidad para P.

ii) (x^*, y^*) es solución óptima de P, λ^* es solución óptima de D y los valores optimales de ambos problemas son iguales.

Observación 1.1.2. Es fácilmente verificable que la definición 1.1.2 es equivalente a la de punto de silla de la función L de Lagrange:

$$L(x,y,\lambda) = u(x,y) - \lambda(x-\bar{z})$$

Se tiene que si la terna (x^*, y^*, λ^*) satisface las condiciones de optimalidad, entonces (x^*,y^*) es solución óptima de P. En general, el recíproco de esta afirmación no es cierto (es decir, si (x^*,y^*) es solución óptima de P, no siempre existe $\lambda^* \in \mathbb{R}_m$ tal que la terna (x^*,y^*, λ^*) verifique las condiciones de optimalidad). Seguidamente estudiaremos condiciones bajo las cuales sí se cumple esta afirmación.

<u>Definición 1.1.3</u>. Supongamos que el problema P admite la solución óptima (x^*,y^*). Diremos que P es <u>Kuhn-Tucker funcional</u> si existe λ^* en $\mathbb{R}_m$, que llamaremos multiplicador optimal (o precio de Kuhn-Tucker), tal que la terna (x^*,y^*, λ^*) satisfaga las condiciones de optimalidad.

<u>Definición 1.1.4</u>. Consideremos el conjunto convexo

$$Z = \left\{ x \in \mathbb{R}_m \middle| \exists\, y, (x,y) \in T \right\}$$

Llamaremos <u>función de valor del problema P</u> a la función v definida en $\mathbb{R}_m$ con valores en la recta extendida, tal que

$$v(z) = \begin{cases} \text{Sup}\left\{u(x,y) \mid x=z, (x,y)\in T\right\} & \text{si } z\in Z \\ -\infty, & \text{si } z \notin Z \end{cases}$$

Observación 1.1.3. El problema P tiene solución admisible si y solo si $\bar{z}\in Z$. En cualquier caso ($\bar{z}\in Z$ ó $\bar{z}\notin Z$), el valor óptimo de P es $v(\bar{z})$.

Veremos que la existencia de los multiplicadores optimales de P está determinada esencialmente por propiedades de la función v.

Proposición 1.1.1. La función v es cóncava sobre **Z**.

Demostración: Para demostrar la concavidad de v mostraremos que el conjunto

$H(v) = \left\{ (z,w)/z \in Z,\ w\in \mathbb{R},\ w\leq v(z)\right\}$, conocido como hipógrafo de v, es convexo.

Sean (z_1,w_1), (z_2,w_2) elementos de $H(v)$ y α_1, α_2 elementos de $\mathbb{R}^+$ con $\alpha_1+\alpha_2 = 1$

$$v(\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2) = \sup_{\substack{(x_1,y_1)\in T \\ (x_2,y_2)\in T}} \left\{ u\left[\alpha_1(x_1,y_1)+\alpha_2(x_2,y_2)\right] \Big/ \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2 = \alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2 \right\}$$

$$\geqslant \sup_{\substack{(x_1,y_1)\in T\\(x_2,t_2)\in T}} \left\{ u\left[\alpha_1(x_1,y_1)+\alpha_2(x_2,y_2)\right] \;/ x_1=z_1, x_2=z_2 \right\}$$

$$\geqslant \sup_{\substack{(x_1,y_1)\in T\\(x_2,y_2)\in T}} \left\{ \alpha_1 u(x_1,y_1)+\alpha_2 u(x_2,y_2) \,\middle|\, x_1=z_1, x_2=z_2 \right\}$$

$$= \alpha_1 \sup_{(x_1,y_1)\in T} \left\{ u(x_1,y_1) \,\middle|\, x_1=z_1 \right\} +$$

$$+ \alpha_2 \sup_{(x_2,y_2)\in T} \left\{ u(x_2,y_2) \,\middle|\, x_2=z_2 \right\}$$

$$= \alpha_1 v(z_1) + \alpha_2 v(z_2) \geqslant \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$$

luego $(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \in H(v)$

Teniendo en cuenta que el subgradiente de v en el punto $\bar{x} \in \mathbb{R}_m$ es un vector fila λ de $\mathbb{R}_m$ tal que $v(x)-v(\bar{x}) \leqslant \lambda(x-\bar{x})$, $\forall x \in \mathbb{R}_m$, nos referimos a un primer resultado que garantiza la existencia de multiplicadores optimales:

Teorema 1.1.3. Si P tiene solución óptima, se cumple que:

λ^* es multiplicador optimal de P si y solo si λ^* es subgradiente de v en $\bar{z}$.

Demostración: Sea (x^*,y^*) solución óptima de P y λ^* multiplicador optimal de P, es decir, (x^*,y^*,λ^*) que satisface las condiciones de optimalidad para P, luego,

$$u(x^*,y^*) \geqslant u(x,y) - \lambda^*(x-\bar{z}) \text{ para todo } (x,y) \in T.$$

Si $z \in Z$, entonces para todo $(x,y) \in T$ con $x=z$ se tiene que

$$u(x^*,y^*) \geqslant u(x,y) - \lambda^*(z-\bar{z})$$

Tomando el supremo con respecto a $(x,y) \in T$ con $x=z$, teniendo en cuenta la definición de v y el hecho de que $v(\bar{z}) = u(x^*,y^*)$, obtenemos que $v(\bar{z}) \geqslant v(z) - \lambda^*(z-\bar{z})$, desigualdad que se mantiene si $z \notin Z$, pues en este caso $v(z)=-\infty$.

Luego $v(\bar{z}) \geqslant v(z) - \lambda^*(z-\bar{z})$, $\forall z \in Z$.

Recíprocamente, sea (x^*,y^*) solución óptima de P y λ^* un subgradiente de v en $\bar{z}$. Siendo (x^*,y^*) solución óptima, es solución admisible de P.

Sea $(x,y) \in T$. Tenemos que $v(x)-v(\bar{z}) \leqslant \lambda^*(x-\bar{z})$.

Como $u(x,y) \leqslant v(x)$ y $v(\bar{z}) = u(x^*,y^*)$, se tiene que

$$u(x,y) - u(x^*,y^*) \leqslant \lambda^*(x-\bar{z})$$

O sea, $u(x^*,y^*) \geqslant u(x,y) - \lambda^*(x-\bar{z})$

Por lo tanto (x^*,y^*) maximiza a la función $u(x,y) - \lambda^*(x-\bar{z})$

en T.

Definición 1.1.5. Diremos que el problema P es estable si el valor $v(\bar{z})$ es finito y si v admite subgradiente en $\bar{z}$.

Una variante del teorema 1.1.3, cuya verificación es inmediata, es la siguiente:

Teorema 1.1.4. Consideremos que P admite solución optimal. P es Kuhn-Tucker funcional si y solo si es estable.

Surge así la importancia de investigar las condiciones que aseguren la existencia de un subgradiente de la función v en el punto $\bar{z}$. El resultado más general en esta dirección es el siguiente:

Proposición 1.1.2: Si $v(\bar{z})$ es finito, entonces P es estable si y solo si existe $M \geqslant 0$ tal que

$$\frac{v(z) - v(\bar{z})}{||z - \bar{z}||} \leqslant M, \text{ para todo } z \in Z,\ z \neq \bar{z} \qquad (1.1)$$

Demostración: La condición necesaria es inmediata tomando M como la norma del subgradiente de v en $\bar{z}$. Suponiendo que existe un $M \geqslant 0$ que satisface 1.1, definimos los conjuntos convexos.

$$A = \left\{ (z,t) \middle| z \in Z,\ t \in \mathbb{R},\ v(z) - v(\bar{z}) \geqslant t \right\} \text{ y}$$

$$B = \left\{ (z,t) \middle| z \in \mathbb{R}_m,\ t \in \mathbb{R},\ M\| z - (\bar{z}) \| < t \right\}$$

El conjunto A es no vacío pues $v(z) > -\infty$, $\forall\, z \in Z$; B es abierto y por 1.1 los conjuntos A y B son disjuntos. Luego, existe $(\lambda, r) \in \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}$ tal que la forma lineal $(\lambda, r)\cdot(x,y)$ separa a los conjuntos A y B, es decir,

$$\lambda z + rt \geqslant \alpha, \text{ si } (z,t) \in A \tag{1.2}$$

$$\lambda z + rt < \alpha, \text{ si } (z,t) \in B \tag{1.3}$$

Como $(\bar{z},0) \in A$, de 1.2 se obtiene $\lambda \bar{z} \geqslant \alpha$.
Por otra parte, $\forall\, \varepsilon > 0$, $(\bar{z}, \varepsilon) \in B$, así de 1.3 se tiene que $\lambda \bar{z} + r\varepsilon < \alpha$, de donde, cuando ε se aproxima a cero resulta que $\lambda \bar{z} \leqslant \alpha$; luego $\lambda \bar{z} = \alpha$, por lo que 1.2 y 1.3 se transforman en

$$\lambda(z-\bar{z}) + rt \geqslant 0, \text{ si } (z,t) \in A$$

$$\lambda(z-\bar{z}) + rt < 0, \text{ si } (z,t) \in B$$

Puesto que $(\bar{z},1) \in B$ se tiene que $r < 0$. Denotando $\lambda^* = \frac{-\lambda}{r}$

se obtiene que $\lambda^*(z-\bar{z}) \geqslant t$, si $(z,t) \in A$.

Si $z \in Z$, entonces $(z, v(z)-v(\bar{z})) \in A$,

luego $\lambda^*(z-\bar{z}) \geqslant v(z) - v(\bar{z}) \quad \forall z \in Z$,

desigualdad que se satisface también si $z \notin Z$.

Luego λ^* es subgradiente de v en $\bar{z}$, con lo cual queda demostrada la condición suficente.

<u>Proposición 1.1.3</u>. Si $v(\bar{z})$ es finito y si $\bar{z}$ es un punto interior de z, entonces P es estable; si además λ es subgradiente de v en $\bar{z}$, se cumple que

$$\left(\frac{\partial v(\bar{z})}{\partial z_i}\right)^+ \leqslant \lambda_i \leqslant \left(\frac{\partial v(\bar{z})}{\partial z_i}\right)^- \quad \forall i \in I$$

<u>Demostración</u>: Como una función cóncava admite subgradiente en todo punto interior que tenga imagen mayor que $-\infty$ ([5] pag 185) y $Z = \left\{ x / v(x) > -\infty \right\}$, P es estable, con lo cual concluimos la demostración de la primera parte.

Para la segunda parte, demostraremos primero la existencia de las derivadas parciales laterales de la función v en el punto $\bar{z}$ del interior de Z:

Sea e_i el i-ésimo vector unitario de $\mathbb{R}_m$, como $\bar{z}$ es un punto interior de Z, existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que $(\bar{z}+\varepsilon\, e_i) \in Z$ $\forall \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$. Asumiendo que $0 < \varepsilon' < \varepsilon'' < \bar{\varepsilon}$, se tiene que

$$v(\bar{z} + \varepsilon'\, e_i) = v\left[\left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}\right) \bar{z} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} (\bar{z} + \varepsilon''\, e_i)\right]$$

$$\geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}\right) v(\bar{z}) + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} v(\bar{z} + \varepsilon''\, e_i)$$

por la concavidad de v.

La expresión anterior equivale a que:

$$\frac{v(\bar{z} + \varepsilon'' e_i) - v(\bar{z})}{\varepsilon''} \leqslant \frac{v(\bar{z} + \varepsilon'\, e_i) - v(\bar{z})}{\varepsilon'}$$

lo cual significa que el cociente $\dfrac{v(\bar{z} + \varepsilon e_i) - v(\bar{z})}{\varepsilon}$,

$0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ es no creciente en ε. Por otro lado, como P es estable, existe $M \geqslant 0$ tal que

$$\frac{v(\bar{z} + \varepsilon e_i) - v(\bar{z})}{\varepsilon} = \frac{v(\bar{z} + \varepsilon e_i) - v(\bar{z})}{\|\bar{z} + \varepsilon e_i - \bar{z}\|} \leqslant M,$$

por consiguiente existe $\left(\dfrac{\partial v(\bar{z})}{\partial z_i}\right)^+ = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{v(\bar{z} + \varepsilon e_i) - v(\bar{z})}{\varepsilon}$

La existencia de $\left(\dfrac{\partial v(\bar{z})}{\partial z_1}\right)^-$ se prueba en forma análoga.

Finalmente mostraremos que λ_1 está acotado por estas derivadas parciales.

Siendo λ subgradiente de v en $\bar{z}$ se cumple que

$$v(\bar{z} + \varepsilon e_1) - v(\bar{z}) \leqslant \lambda(\bar{z} + \varepsilon e_1 - \bar{z}) = \varepsilon\lambda_1, \ \forall\ \varepsilon > 0$$

de donde, $\dfrac{v(\bar{z} + \varepsilon e_1) - v(\bar{z})}{\varepsilon} \leqslant \lambda_1$ y en consecuencia

$$\left(\frac{\partial v(\bar{z})}{\partial z_1}\right)^+ \leqslant \lambda_1$$

La otra desigualdad se deduce similarmente.

1.2.- Dualidad en Programación Cóncava.

Nos interesa en este parágrafo la interpretación de las condiciones de existencia de una solución del dual de un problema de programación cóncava (a partir de una solución dada del problema primal) con términos libres conocidos, en el marco de una tecnología, vista como el conjunto de todas las transformaciones posibles de un conjunto de bonos de entrada dado, en un conjunto de bonos de salida.

Sea Y un conjunto convexo de $\mathbb{R}_n$, f una función cóncava definida en Y, las funciones convexas g_i, $i \in I$ definidas también en Y y los números reales $\bar{z}_i$, $i \in I$.

El problema

$$PC \begin{cases} \text{Max} \quad f(y) \\ \text{sujeto a} \quad g_i(y) \leqslant \bar{z}_i \ , \ i=1,2,\dots,m \\ \qquad\qquad y \in Y \end{cases}$$

es un problema de la programación cóncava.

Denotando
$$G = \begin{pmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ g_m \end{pmatrix} \qquad \bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{z}_m \end{pmatrix}$$

y definiendo la tecnología del sistema como el conjunto

$$T = \left\{ (x,y) \mid G(y) \leqslant x, \ y \in Y \right\},$$

el problema PC se puede escribir en la forma del problema P del parágrafo anterior y por consiguiente su dual será de la forma del problema D del mismo parágrafo, es decir:

$$P' \begin{cases} \text{Max } f(y) \\ \text{sujeto a } (x,y) \in T \\ \qquad x = \bar{z} \end{cases}$$

y respectivamente

$$D' \begin{cases} \text{Min } \left[\varphi(\lambda) = \operatorname*{Sup}_{(x,y) \in T} (f(y) - \lambda(x-\bar{z})) \right] \\ \text{sujeto a } \lambda \in \mathbb{R}_m \end{cases}$$

Lema 1.2.1. La función φ definida en el problema D' admite la representación:

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} +\infty & , \text{ si } \lambda \notin \mathbb{R}_m^+ \\ \text{Sup } \left[f(y) - \lambda(G(y) - \bar{z}) \right] & \text{si } \lambda \in \mathbb{R}_m^+ \end{cases}$$

Demostración: Si λ no es elemento de $\mathbb{R}_m^+$, entonces existe una componente λ_1 de λ, que es negativa. Por la definición de T, resulta que si $(\bar{x}, \bar{y})$ pertenece a T, entonces $(\bar{x} + \alpha e_1, \bar{y})$ también pertenece a T, para todo número α mayor que cero.

Tenemos que

$$\varphi(\lambda) = \operatorname*{Sup}_{(x,y) \in T} \left[f(y) - \lambda(x-\bar{z}) \right] \geqslant f(\bar{y}) - \lambda(\bar{x} + \alpha e_1 - \bar{z}).$$

El miembro derecho de la desigualdad crece infinitamente cuando α tiende al infinito, hecho que representaremos diciendo que $\varphi(\lambda)$ es igual a $+\infty$.

Si λ es elemento de $\mathbb{R}_m^+$ resulta que:

$$\varphi(\lambda) = \sup_{(x,y)\in T} \left[f(y) - \lambda(x-\bar{z})\right]$$

$$= \sup_{\substack{G(y)\leqslant x \\ y\in Y}} \left[f(y) - \lambda(x-\bar{z})\right]$$

$$= \sup_{y\in Y} \left[f(y) - \lambda(G(y)-\bar{z})\right]$$

lo cual queríamos demostrar.

El problema D' puede formularse entonces en la forma siguiente:

$$DC \begin{cases} \text{Min } \varphi(\lambda) = \sup\limits_{y\in Y} \left[f(y) - \lambda(G(y)-\bar{z})\right] \\ \\ \text{sujeto a } \lambda\in\mathbb{R}_m^+ \end{cases}$$

De la definición 1.1.2 y del lema 1.2.1, si la terna (x^*, y^*, λ^*) satisface las condiciones de optimalidad para el problema primal P', se deduce que

$$f(y^*) = \varphi(\lambda^*) = \sup_{y \in Y} \left[f(y) - \lambda^*(G(y) - \bar{z}) \right]$$

de donde $\lambda^* (G(y^*) - \bar{z}) = 0$

Esto nos conduce a una redefinición de las condiciones de optimalidad (definición 1.1.2) en el contexto de la programación cóncava.

Definición 1.2.1. Diremos que el par (y^*, λ^*) de $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_m$ satisface las condiciones de optimalidad para el problema PC si:

a) y^* maximiza a $f(y) - \lambda^*(G(y) - \bar{z})$ en Y.

b) $\lambda^*(G(y^*) - \bar{z}) = 0$

c) $\lambda^* \geqslant 0$

d) $G(y^*) \leqslant \bar{z}$

Estas afirmaciones conducen en forma directa, al siguiente lema:

Lema 1.2.2. El par (y^*, λ^*) satisface las condiciones de optimalidad para el problema PC (en el sentido de la def. 1.2.1) si y solo si la terna $(\bar{z}, y^*, \lambda^*)$ satisface las condiciones de optimalidad para el problema P' (en el sentido de la def. 1.1.2).

Si suponemos que y^* es solución óptima del problema PC, la definición 1.1.3 toma la forma siguiente:

Definición 1.2.2. Diremos que PC es Kuhn-Tucker funcional si existe un vector λ^* de $\mathbb{R}_m$, llamado multiplicador optimal, tal que el par (y^*, λ^*) satisfaga las condiciones optimalidad.

Para el problema PC, el conjunto Z y la función de valor toman, respectivamente, la forma.

$$Z = \left\{ z \,\middle|\, \exists y \in Y,\ G(y) \leqslant z \right\}$$

$$v(z) = \begin{cases} \operatorname{Sup} \left\{ f(y) \,\middle|\, G(y) \leqslant z,\ y \in Y \right\}, & \text{si } z \in Z \\ -\infty, & \text{si } z \notin Z \end{cases}$$

En el caso de que $v(\bar{z})$ sea finito, la estabilidad del problema PC se podrá asegurar mediante una condición que implicará que $\bar{z}$ es elemento del interior de Z.

Definición 1.2.3. Diremos que PC satisface la condición de Slater ([3] pag 166) si existe $\hat{y}$ en Y tal que $g_i(\hat{y}) < \bar{z}_i$, para todo $i \in I$.

Proposición 1.2.1. Si $v(\bar{z})$ es finito y si PC satisface la condición de Slater, entonces PC es estable.

Demostración: Basta mostrar que si la condición de Slater se satisface entonces $\bar{z}$ pertenece al interior de Z.

Sea $\varepsilon = \min\limits_{i \in I} \left\{ \bar{z}_i - g_i(\hat{y}) \right\}$, $\varepsilon > 0$ y z un elemento de $\mathbb{R}_m$ que pertenece a la esfera centrada en $\bar{z}$ de radio $\varepsilon/2$. Resulta que $g_i(\hat{y}) \leqslant z_i$, para todo $i \in I$, luego $z \in Z$, de donde $\bar{z}$ es un punto interior de Z.

La condición de Slater nos permite entonces, asegurar la estabilidad (proposición 1.1.3) y consecuentemente la Kuhn-Tucker funcionabilidad del problema PC.

1.2.1.- Dualidad en Programación Lineal

Veremos algunos aspectos del modo en que la dualidad en un problema de Programación Lineal se encuadra en la teoría desarrollada.

Consideremos el problema de Programación Lineal

$$\text{PL}\ \begin{cases} \text{Max } c'y \\ \text{sujeto a } A\,y \leqslant \bar{z} \\ \qquad\qquad y \in Y = \mathbb{R}_n^+ \end{cases}$$

donde $c \in \mathbb{R}_n$ y A es una matriz mxn y su dual:

$$\begin{cases} \text{Min } \quad \varphi(\lambda) = \sup\limits_{y \geqslant 0} \left[c'y - \lambda(Ay - \bar{z})\right] \\ \\ \text{sujeto a } \quad \lambda \in \mathbb{R}_m^+ \end{cases}$$

Como $\varphi(\lambda) = \sup\limits_{y \geqslant 0} \left[(c' - \lambda A)y + \lambda z\right]$, tenemos que

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \lambda z & \text{si} \quad c' - \lambda A \leqslant 0 \\ \\ +\infty & \text{si} \quad c' - \lambda A > 0 \end{cases}$$

Luego el problema dual se puede escribir en la forma

$$\text{Min} \quad \lambda \bar{z}$$

$$\text{sujeto a} \quad \lambda A \geqslant c'$$
$$\lambda \geqslant 0$$

Por el Teorema de Dualidad de la Programación Lineal (Si alguno de los problemas duales tiene solución óptima finita, también la tiene el otro y los valores optimales son iguales. Si alguno tiene solución infinita, el otro no tiene solución admisible) y aplicando los teoremas 1.1.2 y 1.1.4, si el problema PL tiene solución óptima, entonces es estable; es decir, su función de valor admite subgradiente en el punto $\bar{z}$.

1.3.- Interpretación económica

Refiriéndonos al problema PC, para un conjunto de recursos $\bar{z}$, se puede realizar una colección de bonos y, si y solo si $G(y) \leqslant \bar{z}$ con $y \in Y$. $G(y)$ representa la necesidad de recursos para producir y, mientras que Y representa la totalidad de los planes de producción tecnológicamente realizables. Considerando que f mide el valor de la producción, el problema PC pide determinar el plan de producción de valor máximo.

Si y^* es solución óptima del problema PC, siendo éste Kuhn-Tucker funcional, interpretamos cada componente λ_i^* del multiplicador optimal como el precio del i-ésimo recurso $\bar{z}_i$. Con este sistema de precios, el beneficio por la realización del plan $\hat{y}$ es $f(\hat{y}) - \lambda^* G(\hat{y})$. Así, las condiciones a) y b) de la definición 1.2.1 expresan, respectivamente, que el plan y^* maximiza el beneficio y que el costo de los recursos disponibles es igual al costo de los recursos utilizados.

Las componentes de λ^* generalmente no coinciden con el precio real de los recursos, se les diferencia de estos con el nombre de "precios sombra" o "precios de Kuhn-Tucker. No obstante, son grandes indicadores para que los planificadores puedan verificar la optimalidad de un programa de producción.

La función de valor v de PC suministra los valores máximos de producción con respecto a los recursos. Una función con tal característica se llama función de producción, la cual es creciente y cóncava. El subgradiente λ^* de v en $\bar{z}$ nos informa de la sensibilidad del valor máximo $v(\bar{z})$ con respecto a las modificaciones de $\bar{z}$. De la relación $v(z)- v(\bar{z}) \leqslant \lambda^*(z-\bar{z})$, $\forall\ z \in \mathbb{R}_m$, se obtiene que

$$v(\bar{z})- v(\bar{z}-h) \geqslant \lambda^* h \geqslant v(\bar{z} + h)- v(\bar{z}),\ \forall h,\ h \in \mathbb{R}_m^+ .$$

Estas desigualdades señalan que si la disponibilidad de recursos crece de $\bar{z}$-h a $\bar{z}$, la función crece en por lo menos λ^{*} h ; si después crece de $\bar{z}$ a $\bar{z}$ + h, el efecto puede ser a lo mas de λ^{*}h. Este fenómeno es un ejemplo de una propiedad de las funciones de producción llamada "ley de decrecimiento del efecto". En fin, si la función v es diferenciable en $\bar{z}$, entonces

$$\frac{\partial v(\bar{z})}{\partial \bar{z}_i} = \lambda_i^{*}, \quad \forall i \in I$$

es decir, λ_i^{*} mide la eficiencia diferencial (marginal) del recurso i en el conjunto de recursos $\bar{z}$.

Diremos que para un cierto vector de recursos $\bar{z}$ el sistema económico se encuentra en equilibrio si realiza un conjunto de bonos que sea solución óptima del problema PC.

Si $\bar{z}$ y $\bar{\bar{z}}$ son vectores de recursos que definen problemas estables y si λ^{*}, λ^{**} son los precios sombra correspondientes, entonces:

$$v(\bar{\bar{z}}) - v(\bar{z}) \leqslant \lambda^{*}(\bar{\bar{z}} - \bar{z}) \quad \text{y}$$

$$v(\bar{z}) - v(\bar{\bar{z}}) \leqslant \lambda^{**}(\bar{z} - \bar{\bar{z}})$$

de donde

$$(\lambda^{**} - \lambda^{*})(\bar{\bar{z}} - \bar{z}) \leqslant 0$$

relación que simbolizaremos en la forma siguiente:

$$\Delta \lambda^{*} \cdot \Delta \bar{z} \quad 0 \qquad (1.4)$$

Si uno de los recursos se modifica, por ejemplo $\bar{z}_j$ y $\Delta z_i = 0$ para $i \neq j$, entonces, de 1.4 se tiene que

$$\Delta \lambda^{*} \cdot \Delta \bar{z} = \Delta \lambda^{*}_{j} \; \Delta \bar{z}_{j} \leqslant 0,$$

es decir, en condiciones de mantenimiento del equilibrio, en un aumento (disminución) de un recurso, el sistema reacciona por decrecimiento (crecimiento) de la eficiencia marginal de ese recurso.

La desigualdad 1.4 puede ser llamada "El Principio de Le Chatelier para el problema PC" pues ejemplifica en un problema económico, el principio del químico francés Le Chatelier: "Si un sistema se encuentra en equilibrio estable y una de las condiciones es modificada, entonces el equilibrio se altera con tendencia a anular la modificación aplicada a las condiciones".

CAPITULO II

EL MODELO DE VON NEUMANN:
UN MODELO DE EQUILIBRIO ECONOMICO GENERAL

Introducción:

El modelo multisectorial de crecimiento equilibrado de John von Neumann puede ser considerado como el primer intento de aplicación rigurosa de la Matemática en Economía. Concretamente se refiere a la aplicación del Teorema de Punto Fijo de Brower. Primeramente, el problema económico propuesto se reduce a uno geométrico, particularmente perteneciente a la geometría de conjuntos convexos compactos de $\mathbb{R}^n$. Luego, un tratamiento topológico conduce a la solución. Esta solución no se construye, por lo que no será posible su cuantificación; esto, a la hora de alguna aplicación práctica, será un tremendo obstáculo al no disponerse de un algoritmo que permita determinar la solución,sin embargo aunque no es el propósito de nuestro estudio, añadimos que existen técnicas numéricas que permiten aproximarla.

El modelo de von Neumann apareció por primera vez en 1936 sin llamar la atención de los economistas, quizás debido al aparato matemático utilizado. Vino a ser conocido por estos en 1945. El principal objetivo de von Neumann es la demostración de la existencia de una trayectoria de crecimiento equilibrado (proporcional) maximal, en la cual todos los bonos crecen en la misma proporción con la mayor rata que puede admitir una tecnología.

2.1.- Descripción del modelo von Neumann

El modelo von Neumann considera una economía en que m tipos de bonos, $B_1, B_2, \ldots, B_m$ son producidos de n procesos elementales, $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Nos planteamos el problema:

A. ¿Qué procesos han de utilizarse como provechosos y qué precios de los bonos se obtendrán?
¿Es posible una designación de unos y otros que lleve a una situación económica satisfactoria?

Definición 2.1.1. Llamaremos proceso elemental a toda combinación de bonos en proporciones fijas.

Cada proceso elemental P_j, $j=1,\ldots,n$ es caracterizado por dos vectores no negativos:

uno de entrada $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ y uno de salida $b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{mj} \end{pmatrix}$

donde a_{ij} representa la cantidad del bono B_i necesaria para el funcionamiento del proceso elemental P_j a un nivel de intensidad igual a 1, mientras que b_{ij} representa la cantidad del bono B_i que resulta de este funcionamiento. Afirmamos entonces que cada proceso P_j asigna a la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} B_i$ de bonos de entrada la cantidad $\sum_{i=1}^{m} b_{ij} B_i$ de bonos de salida.

Simbólicamente representaremos esta afirmación como sigue:

$$P_j : \sum_{i=1}^{m} a_{ij}B_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{m} b_{ij}B_i, \forall j= 1,\ldots,n$$

Se tiene que para cualquier proceso elemental P_j, es posible que más de uno de los valores b_{ij}, $i=1,\ldots,m$ sea diferente de cero. Es decir, un proceso elemental puede producir simultáneamente varios tipos de bonos. Además haremos las siguientes hipótesis:

Criterios de intensidad: Cada proceso elemental puede funcionar a cualquier nivel de intensidad.

Criterio de simultaneidad: Los procesos elementales pueden funcionar simultáneamente sin alterar las proporciones en que los bonos se combinen.

Definición 2.1.2. Llamaremos período de producción a la duración de los procesos elementales para obtener la salida. (Supondremos el mismo período de producción para todos los procesos elementales).

Distinguiremos además las siguientes características:

a) El modelo es cerrado, pues no existen flujos de bonos desde el exterior ni hacia el exterior, de modo que todos los bonos que se utilicen en el modelo se habrán producido anteriormente en él, y cualquier salida se usará como entrada en el período siguiente.

b) No se hará distinción entre bonos capitales y bonos producidos.

c) Los factores naturales de producción incluyendo el trabajo, pueden ser expandidos en cantidades ilimitadas.

ch) El consumo de bonos se realiza solamente a través de procesos de producción, entre los que se incluye la satisfacción de las necesidades vitales de los trabajadores. Todo lo que se vuelve exceso de producción será necesariamente reinvertido.

d) La utilización y desgaste de bonos capitales será descrito introduciendo diferentes grados de usos como bonos diferentes y empleando un proceso separado P_j para cada uno de ellos.

e) El tiempo de duración de cada proceso será unitario. Así, los procesos de duración larga serán fraccionados en procesos intermedios de duración unitaria, cuyos productos "inacabados" se incluirán en la lista de bonos B_i.

f) Son posibles los procesos en los que un bono se produce solamente combinado con otros.

En la economia real, los procesos $P_j, j=1,\ldots,n$ se realizan con cierta intensidad $x_j, j=1,\ldots,n$. Estas intensidades se logran mediante un incremento del trabajo, o por la introducción de tecnologías adecuadas. La introducción de estas intensidades nos permite concebir la economía, en su conjunto, como un proceso E tal que al total de bonos utilizados en todos los procesos, le corresponde el total de bonos producidos mediante esos mismos procesos. Esto lo simbolizaremos así:

$$E : \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} B_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j b_{ij} B_i$$

Utilizaremos además la siguiente notación:

$x_j(t)$: nivel de intensidad del funcionamiento del proceso elemental j en el período t.

$y_i(t)$: precio del bono B_i en el período t.

$\beta(t)$: factor de interés en el período t.

Haremos entonces la hipótesis de que los procesos elementales son financiados a base de crédito.

Formularemos el modelo con la ayuda de dos familias de desigualdades lineales duales.

La primera familia de desigualdades expresa el deseo de que la entrada de cualquier bono para el período t+1 no sobrepase su salida del período t:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t+1) \leq \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j(t), \quad i=1,\dots,m \qquad (2.1)$$

El costo (incluyendo los pagos de los intereses) del funcionamiento del proceso elemental P_j en el período t a un nivel de intensidad unitaria, debe ser por lo menos igualmente grande que el valor de la salida correspondiente evaluada con el precio en el período t+1. Esto es:

$$\beta(t) \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i(t) \geq \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i(t+1), j=1,\dots,n \qquad (2.2)$$

En el marco suministrado por las desigualdades 2.1

y 2.2, von Neumann considera el estado de crecimiento equilibrado en que los niveles de intensidad de los procesos elementales crecen o decrecen de un período a otro en progresión geométrica con igual razón, y los precios de los bonos y la rata de interés son invariantes en el tiempo.

Denotando $x_j(0) = x_j \geqslant 0, \; j=1,\ldots,n$

$$y_i(0) = y_i \geqslant 0, \; i=1,\ldots,m$$

$$\beta(0) = \beta \geqslant 0$$

el estado de crecimiento equilibrado (en cualquier período t) va a ser descrito por las siguientes relaciones

$$x_j(t) = \alpha^t x_j, \; j=1,\ldots,n \tag{2.3}$$

$$y_i(t) = y_i \; , \; i=1,\ldots,m \tag{2.4}$$

$$\beta(t) = \beta \tag{2.5}$$

donde $\alpha \geqslant 0$ es el factor de crecimiento (o de decrecimiento si es menor o igual que 1) de los niveles de intensidad de los procesos elementales.

Aplicando 2.3 - 2.5 en 2.1 y 2.2 obtenemos

$$\alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j \;,\; i=1,\dots,m$$

$$\beta \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i \;,\; j=1,\dots,n$$

Imponemos además las condiciones siguientes:

a. $$\alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \Longrightarrow y_i = 0$$

significa que si hay exceso de producción de un bono B_i, su precio será cero; en este caso el bono B_i se llamará libre.

b. $$\beta \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i \Longrightarrow x_j = 0$$

indica que si un proceso p_j produce pérdida, no se realice, su intensidad x_j será cero; y finalmente

c. $$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j y_i > 0$$

que pide que el valor total de la salida sea positivo.

Consideremos el sistema D:

$$
D \begin{cases}
B \begin{cases}
x_j \geqslant 0, \quad j=1,\dots,n & \text{B1} \\
y_i \geqslant 0, \quad i=1,\dots,m & \text{B2} \\
\sum_{j=1}^{n} x_j > 0 & \text{B3} \\
\sum_{i=1}^{m} y_i > 0 & \text{B4} \\
\alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j, \quad \forall i=1,\dots,m & \text{B5} \\
\beta \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i, \quad \forall j=1,\dots n & \text{B6} \\
\alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \Longrightarrow y_i = 0 & \text{B7} \\
\beta \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i \Longrightarrow x_j = 0 & \text{B8}
\end{cases} \\
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j y_i > 0 & \text{B9}
\end{cases}
$$

Como la solución $x_1=\ldots=x_n=0$ ó $y_1=\ldots=y_m=0$ sería sin sentido económico, hemos supuesto también las condiciones B3 y B4.

En el sistema D es sobresaliente la simetría dual entre las relaciones B1, B3, B5, B7 de x_j, α y el concepto "proceso no realizado", por un lado, y las relaciones B2, B4, B6, B8 de y_i, β y el concepto "bono libre" por el otro.

Las cantidades a_{ij} , b_{ij} son dadas, mientras que x_j, $(j=1,\ldots,n)$, y_i, $(i=1,\ldots,n)$, α , β son indeterminadas.

Nuestro trabajo se limitará a mostrar que bajo algunas condiciones, siempre existen soluciones de D. Concretamente, estudiaremos el problema siguiente:

¿Existen un coeficiente de expansión, un factor de interés, unas intensidades productivas y unos precios, de manera que D se verifique?

2.2.- <u>Existencia de soluciones del modelo von Neumann</u>

John von Neumann demostró la existencia de una solución del sistema B en la hipótesis de que las componentes de los vectores no negativos a_j, b_j satisfagan la condición

$$a_{ij}+b_{ij} > 0 \ , \ i=1,\ldots,m \ , \ j=1,\ldots,n \qquad (2.6)$$

cuyo significado económico es inmediato: Todo bono B_i debe participar en todo proceso P_j en cantidades positivas, ya sea como producto o como materia prima. Esta hipótesis no es difícil de satisfacer, ya que, por efectos de aproximación, se le puede asignar a a_{ij}, b_{ij} cantidades arbitrariamente pequeñas en caso de que algún bono B_i no figurara inicialmente en un proceso P_j.

Consideremos una solución hipotética de B:

x_j, $(j=1,\ldots,n)$, α, β, y_i, $(i=1,\ldots,m)$. Por B4 y B7, en B5 se debe tener la igualdad por lo menos una vez. Igualmente, por B3 y B8, en B6 se debe tener la igualdad por lo menos una vez.

En consecuencia:

$$\alpha = \min_{i=1,\ldots,m} \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} \qquad (2.7)$$

$$\beta = \max_{j=1,\ldots,n} \frac{\sum_{i=1}^{m} b_{ij}y_i}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i} \qquad (2.8)$$

Las condiciones B1 - B4 y 2.6 garantizan que los cocientes de los miembros derechos de 2.7 y 2.8 nunca asuman la forma particular (sin sentido) $\frac{0}{0}$, y con la hipótesis de que podemos atribuir a los a_{ij} cantidades arbitrariamente pequeñas podemos evitar cualquier expresión sin sentido del tipo $\frac{k}{0}$.

De estas igualdades se deduce que α y β quedan unívocamente determinados por $x_j, (j=1,\ldots,n)$, $y_i, (i=1,\ldots,m)$, lo que en ningún modo significa que B tenga solución única.

Es inmediato demostrar que las condiciones B5 - B8 son equivalentes a las dos siguientes:

$$y_i = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j} \quad \text{no alcanza el valor mínimo} \qquad \text{B5*}$$

$$x_j = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\sum_{i=1}^{m} b_{ij}\, y_i}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i} \quad \text{no alcanza el valor máximo} \qquad \text{B6*}$$

Las soluciones (x,y) de B5* y B6* pertenecen a la región ExF de $\mathbb{R}^n x \mathbb{R}^m$, donde $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / x_j \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n} x_j > 0 \right\}$

$F = \left\{ y \in \mathbb{R}^m / y_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} y_i > 0 \right\}$. Consideremos las regiones normalizadas

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / x_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \right\} \text{ de } E$$

$$T = \left\{ y \in \mathbb{R}^m / y_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} y_i = 1 \right\} \text{ de } F$$

Previo al tratamiento de nuestro problema presentaremos algunos resultados.

En lo que sigue utilizaremos la forma abreviada C-conjunto para referirnos a un conjunto no vacío, cerrado, convexo y acotado.

Lema 2.2.1. Sean $S^o \subset \mathbb{R}^n$ y $T^o \subset \mathbb{R}^m$ C-conjuntos. Sean V y W subconjuntos cerrados no vacíos de $S^o \times T^o$. Si para todo x de S^o, $Q(x) = \left\{ y/(x,y) \in V \right\}$ es un C-conjunto y para todo y de T^o, $P(y) = \left\{ x/(x,y) \in W \right\}$ es un C-conjunto, entonces la intersección de V y W es no vacía.

Demostración: Para todo x de S^o, escogemos un punto $y^o(x)$

(por ejemplo el centro de gravedad de este conjunto). Sea ε mayor que cero. Definiremos la función en x' de S^o

$$w^{\varepsilon}(x,x') = \max\left(0,\ 1-\frac{1}{\varepsilon}\ d(x,x')\right) \qquad (2.9)$$

Sea $y^{\varepsilon}(x)$ el centro de gravedad de los puntos $y^o(x')$ con x' en S^o, con función de peso (relativa a x, ε) $w^{\varepsilon}(x,\cdot)$. Es decir, si $y^o(x) = (y_1^o(x),\ldots,y_m^o(x))$ y

$$y^{\varepsilon}(x) = (y_1^{\varepsilon}(x),\ldots,y_m^{\varepsilon}(x)), \text{ entonces}$$

$$y_i(x) = \frac{\int_{S^o} w^{\varepsilon}(x,x')y_i^o(x')dx'}{\int_{S^o} w^{\varepsilon}(x,x')dx'} \qquad (2.10)$$

$y^{\varepsilon}(x)$ goza de algunas propiedades válidas para todo ε mayor que cero:

i) $y^{\varepsilon}(x)$ pertenece a T^o

En efecto: $y^o(x')$ está en $Q(x')$, para todo x' de S^o; luego $(x',y^o(x'))$ pertenece a V, es decir $y^o(x')$ está en T^o que es convexo. Por lo tanto, el centro de gravedad de estos puntos de T^o está también en T^o.

ii) y^{ε} es una función contínua en S^o.

Será suficiente probar la continuidad para cada función componente y_i^{ε}.

Por definición, la función $w^{\varepsilon}(x,x')$ es continua en x,x' en todas partes. Además $\int_{S^o} w^{\varepsilon}(x,x')\,dx'$ es siempre mayor que cero, y todos los $y_i^o(x)$ son acotados, por ser coordenadas del conjunto acotado S^o, así, la continuidad de y_i^{ε} se deduce de la expresión 2.10.

iii) Para todo δ mayor que cero, existe un $\varepsilon_o = \varepsilon_o(\delta)$ mayor que cero, tal que la distancia de cada punto $(x, y^{\varepsilon_o}(x))$ a V es menor que δ.

Supongamos que existe δ mayor que cero de modo que para todo ε mayor que cero, existe x tal que la distancia de $(x, y^{\varepsilon}(x))$ a V es mayor o igual que δ. Entonces, en particular, existe δ mayor que cero y existe una sucesión $(\varepsilon_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ que tiende a cero, tal que para cada ν de $\mathbb{N}$, existe x_ν en S^o con la distancia de $(x_\nu, y^{\varepsilon_\nu}(x_\nu))$ a V mayor o igual que δ.

Por un lado tenemos que si $d(x_\nu, x')$ es menor o igual que $\delta/2$ entonces $d(y^{\varepsilon_\nu}(x_\nu), y')$ es mayor o igual que $\delta/2$ para todo y' de $Q(x')$. En efecto:

Para todo y' de $Q(x')$ se tiene que (x',y') está en V, entonces $d((x_\nu, y^{\varepsilon_\nu}(x_\nu)), (x',y'))$ es mayor o igual que δ.

Sea $d(x_\nu, x')$ mayor o igual que $\delta/2$.

Como $\delta/2 + \sqrt{(y^{\varepsilon_\nu}(x_\nu)-y')^2} \geqslant \sqrt{(x_\nu - x')^2} + \sqrt{(y^{\varepsilon_\nu}(x_\nu)-y')^2}$

$$\geqslant \sqrt{(x_\nu - x')^2+(y^{\varepsilon_\nu}(x_\nu)-y')^2} \geqslant \delta$$

entonces $d(y^{\varepsilon_\nu}(x_\nu),y') = \sqrt{(y^{\varepsilon_\nu}(x_\nu)-y')^2} \geqslant \delta/2$ para todo y' de $Q(x')$.

Todos los x_ν , $\nu = 1,2,\ldots$ están en S^o, y tienen, por el teorema de Bolzano-Weirstrass un punto de acumulación $\bar{x}$ en S^o. Luego, a consecuencia del mismo teorema, existe una sub-sucesión de $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ convergiendo hacia $\bar{x}$ con $d(x_\nu, \bar{x}) \leqslant \delta/2$. Sustituyendo esta subsucesión por x_ν , podemos afirmar que la sucesión $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ tiende a $\bar{x}$ con $d(x_\nu, \bar{x}) \leqslant \delta/2$. De donde se tiene que la distancia de $y^{\varepsilon_\nu}(x_\nu)$ a $Q(\bar{x})$ es mayor o igual que $\delta/2$.

Consideremos el conjunto $Q = \left\{ y/d(y,Q(\bar{x})) < \delta/2 \right\}$.

Como $Q(\bar{x})$ es convexo, Q es también convexo. Evidentemente $y^{\varepsilon_\nu}(x_\nu)$ no está en Q, siendo $y^{\varepsilon_\nu}(x_\nu)$ el centro de gravedad de los puntos $y^o(x')$ con $d(x_\nu, x') \leqslant \varepsilon_\nu$ (pues si $d(x_\nu, x') > \varepsilon_\nu$, de acuerdo con 2.9 se tendría $w^{\varepsilon_\nu}(x_\nu, x')=0$). Luego, no todos los puntos $y^o(x')$ pertenecen a Q. Por lo tanto, existe al menos un punto x'_ν tal que $d(x_\nu, x'_\nu) \leqslant \varepsilon_\nu$ y de modo que la distancia de $y^o(x'_\nu)$ a $Q(\bar{x})$ es mayor o igual que $\delta/2$.

Por otro lado, a medida que ν crece, x_ν tiende a $\bar{x}$ y $d(x_\nu, x'_\nu)$ se acerca a cero, por lo tanto la sucesión $(x'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$

tiende a $\overline{x}$.

Para todo ν de $\mathbb{N}$, el punto $y^{o}(x_{\nu})$ pertenece a T^{o}, luego los puntos $y^{o}(x_{\nu})$ tienen un punto de acumulación $\overline{y}$. En consecuencia $(\overline{x},\overline{y})$ está en V, pues es punto de acumulación de los $(x_{\nu},\ y^{o}(x_{\nu}))$ de V que es cerrado. Luego $\overline{y}$ pertenece a $Q(\overline{x})$

Ahora, la distancia de cada punto $y^{o}(x_{\nu})$ a $Q(\overline{x})$ es mayor o igual que $\delta/2$. Con esto termina la prueba pues constituye una contradicción.

Las propiedades (i)-(iii) afirman que para todo $\delta>0$, existe una aplicación continua Y_{δ} de S^{o} en un subconjunto de T^{o}, tal que la distancia de cada punto $(x,Y_{\delta}(x))$ a V es menor que δ, haciendo $Y_{\delta}(x)=y^{\varepsilon}(x)$, con $\varepsilon=\varepsilon_{o}=\varepsilon_{o}(\delta)$.

Intercambiando S^{o} y T^{o}, V y W, obtenemos que para todo $\delta>0$ existe una aplicación X_{δ} de T^{o} en un subconjunto de S^{o}, tal que la distancia de cada punto $(X_{\delta}(y),y)$ a W es menor que δ, haciendo $X_{\delta}(y)=x^{\varepsilon}(y)$, con $\varepsilon=\varepsilon_{o}=\varepsilon_{o}(\delta)$.

$f_{\delta}=X_{\delta}\circ Y_{\delta}$ es una aplicación continua de S^{o} en un subconjunto de S^{o}. Como S^{o} es un C-conjunto, por el Teorema de Brower, f_{δ} admite un punto fijo. Es decir, existe un elemento x^{δ} de S^{o} para el que $f_{\delta}(x^{\delta})=X_{\delta}(Y_{\delta}(x^{\delta}))=x^{\delta}$. Si $y^{\delta}=Y_{\delta}(x^{\delta})$, entonces tenemos que $x^{\delta}=X_{\delta}(y^{\delta})$. En consecuencia, las distancias del punto (x^{δ},y^{δ}) de $\mathbb{R}^{n+m}$ a V y W son menores que δ. Por lo tanto $d(V,W) < 2\delta$. Como esto es válido para todo $\delta > 0$, entonces $d(V,W)=0$. Pero V y W son conjuntos cerrados y acotados, luego deben tener al menos un punto en común, lo cual prueba el lema.

Volviendo a nuestro problema, si hacemos $S^o=S$, $T^o=T$,

$V = \{(x,y) \in S^o x T^o / (x,y)$ cumple B5*$\}$ y

$W = \{(x,y) \in S^o x T^o / (x,y)$ cumple B6*$\}$, se prueba sin dificultad que V,W son cerrados y que S^o, T^o, $Q(x)$, $P(y)$ con C-conjuntos, para todo x de S^o, y de T^o. Los puntos comunes de V y W(ver lema 2.2.1) son las soluciones requeridas de B5* y B6* en S x T.

<u>Proposición 2.2.1</u>. Si $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_m)$ es punto común de V y W entonces

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j\right)y_i}{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)y_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ij}y_i\right)x_j}{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\right)x_j} = \beta$$

<u>Demostración</u>:

Sea $\hat{I}$ el conjunto de los índices i para los que el cociente $\dfrac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}$ asume el valor mínimo. Entonces para todo i de $\hat{I}$ se tiene que

$$\alpha = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} \; ; \text{ es decir } \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j$$

Luego $\alpha \sum_{i\in \hat{I}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) y_i = \sum_{i\in \hat{I}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j\right) y_i$

Como para todo i que no esté en $\hat{I}$, $y_i=0$, entonces

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) y_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j\right) y_i$$

Análogamente $\beta = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ij}y_i\right)x_j}{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\right)x_j}$

Podemos afirmar entonces que (x,y,α,β) es solución de B, donde (x,y) pertenece a $V\cap W$ y $\alpha=\beta$ es obtenido de acuerdo con la proposición anterior.

<u>Proposición 2.2.2.</u> El valor de α (es decir de β) es único (independientemente del par (x,y) de $V\cap W$).

<u>Demostración</u>: Sean $(x^1,y^1,\alpha^1,\beta^1)$, $(x^2,y^2,\alpha^2,\beta^2)$ solu-

ciones de B.

Se tiene que $\alpha^1 = \beta^1 \leqslant \dfrac{\sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^1) y_i^2}{\sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^1) y_i^2}$

y que $\alpha^2 = \beta^2 \geqslant \dfrac{\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i^2) x_j^1}{\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^2) x_j^1}$

Por lo tanto $\alpha^1 = \beta^1 \leqslant \alpha^2 = \beta^2$. Análogamente, se deduce que $\alpha^2 = \beta^2 \leqslant \alpha^1 = \beta^1$, con lo que se concluye la demostración.

En resumen, bajo la condición $a_{ij} + b_{ij} > 0$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$: "Al menos existe una solución (x, y, α, β) de B y en todas las posibles soluciones, el factor de interés y el coeficiente de expansión de la economía son iguales y únicamente determinados por los procesos técnicamente posibles $P_1, \ldots, P_n$". Con esto se culmina una etapa importante en el estudio del problema de existencia de la solución del modelo von Neumann.

La siguiente caracterización solo es posible sobre la base del conocimiento de la existencia de soluciones del sistema B.

Proposición 2.2.3. Consideremos un estado de la economía en condiciones puramente técnicas y una solución (x^*,y^*,α,β) del sistema B. Despreciando precios, α es el mayor factor de expansión de la economía y despreciando intensidades de producción, β es el menor factor de interés con el cual es posible un sistema desventajoso de precios.

Demostración: Supongamos que la economía se expande con un factor α' por unidad de tiempo y que los procesos se realizan con intensidades x_1', $x_2',\ldots,x_n'$. Luego, despreciando precios, se cumple que:

$$x_j' \geqslant 0 \qquad j=1,\ldots,n \qquad \text{B1'}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j' > 0 \qquad \text{B3'}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j' \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j' \qquad \text{B5'}$$

Multiplicando B5' por y_i^* y sumando sobre i, obtenemos

$$\alpha' \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x'_j\, y^*_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x'_j y^*_i$$

de donde

$$\alpha' \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x'_j\, y^*_i}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x'_j\, y^*_i}$$

Como $\alpha = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x^*_j y^*_i}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^*_j y^*_i} \geqslant \dfrac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x'_j\, y^*_i}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j\, y^*_i}$

se concluye que $\alpha' \leqslant \alpha$.

Consideremos ahora un sistema de precios $y'_1,\ldots,y'_m$ donde el factor de interés β' no concede más beneficios. Entonces, despreciando intensidades, se cumple que:

$$y'_i \geqslant 0 \ , \quad i=1,\ldots m \qquad \text{B2'}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y'_i > 0 \qquad \text{B4'}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y'_i \geqslant \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y'_i \qquad \text{B6'}$$

Multiplicando B6' por x_j^* y sumando sobre j, se obtiene

$$\beta' \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y'_i x_j^* \geqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y'_i x_j^*$$

de donde

$$\beta' \geqslant \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y'_i x_j^*}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y'_i x_j^*} \geqslant \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i^* x_j^*}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* x_j^*} = \beta$$

con lo que termina la prueba.

Al trabajo de von Neumann siguieron los de Kemeny, Morgenstein y Thompson quienes mostraron la existencia de una solución al sistema D en las condiciones:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} > 0, \quad j=1,\dots,n \tag{H1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} > 0, \quad i=1,\dots,m \tag{H2}$$

La hipótesis H1 impone que cualquier proceso elemental utilice al menos un bono, mientras que H2 desea que cualquier bono sea realizado de por lo menos un proceso elemental.

2.3.- Tecnología von Neumann. Solución de equilibrio.

En lo que sigue vamos a suponer que son satisfechas las hipótesis H1 y H2.

Sean

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = (y_1 \dots y_i \dots y_m)$$

Con esta notación, las restricciones B5-B9 que debe satisfacer el cuarteto (x,y,α,β), $x\in \mathbb{R}^+_n$, $y \in \mathbb{R}^+_m$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$ para definir un estado de crecimiento equilibrado, se escriben en la forma siguiente:

$$(B-\alpha A)\ x \geqslant 0 \tag{2.11}$$

$$y(B-\beta A)\leqslant 0 \tag{2.12}$$

$$y(B-\alpha A)x=0 \tag{2.13}$$

$$y(B-\beta A)x=0 \tag{2.14}$$

$yB\ x > 0$ (2.15)

Sea $I = \left\{ i \in \mathbb{N} / 1 \leqslant i \leqslant m \right\}$, $J = \left\{ j \in \mathbb{N} / 1 \leqslant j \leqslant n \right\}$

Sea $x \in \mathbb{R}_n^+$ un vector arbitrario de niveles de intensidad de los procesos elementales. A x le corresponde una entrada Ax y una salida Bx, donde para todo $i \in I$,

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad y \quad (Bx)_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j$$

representan respectivamente la entrada total y salida total del bono B_i relativo a x.

Definición 2.3.1. Llamaremos Tecnología von Neumann generada por las matrices A y B al conjunto $T = \left\{ (Ax, Bx) x \in \mathbb{R}_n^+ \right\}$ y a todo elemento de T, proceso tecnológico realizable o simplemente proceso.

Un proceso es entonces, un par entrada-salida de conjuntos de bonos resultantes de los procesos elementales a ciertos niveles de intensidad.

Es claro que cualquier proceso elemental es un proceso. En efecto:

Para todo $j \in J$, $P_j = (a_j, b_j) = (Ae_j, Be_j)$ donde e_j es el j-ésimo vector unitario de $\mathbb{R}_n^+$.

<u>Lema 2.3.1.</u> T es un cono poliédrico de $\mathbb{R}_m^+ \times \mathbb{R}_n^+$ con las propiedades:

i) Si $(Ax,Bx) \in T$ y $Ax = 0$, entonces $Bx=0$

ii) Existe un proceso $(A\tilde{x},B\tilde{x})$ en T para el cual $B\tilde{x} \gg 0$.

<u>Demostración:</u> Todo elemento (Ax, Bx) de T se puede escribir en la forma $\sum_{j=1}^{n} x_j(a_j,b_j)$, luego T es un cono poliédrico generado por los n vectores 2m dimensionales $(a_j,b_j), j=1,...,n$. Sea $x \in \mathbb{R}_n^+$ y (Ax,Bx) el proceso correspondiente. Si $Ax=0$, de H1 resulta que $x=0$, de donde $Bx=0$ con lo que se demuestra i). La parte ii) se obtiene inmediatamente de H2. Basta elegir $\tilde{x} \in \mathbb{R}_n^+$ con $\tilde{x} \gg 0$.

<u>Definición 2.32.</u> Llamaremos <u>solución de equilibrio de la Tecnología von Neumann</u> a un cuarteto (x,y,α,β), $x \in \mathbb{R}_n^+$ $y \in \mathbb{R}_m^+$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$ que satisfaga el sistema 2.11-2.15.

<u>Lema 2.3.2.</u> Si (x,y,α,β) es solución de equilibrio de la Tecnología von Neumann entonces $\alpha=\beta > 0$

<u>Demostración:</u> De 2.13, 2.14 y 2.15 se obtiene

B y Ax $=\alpha$ y Ax = yBx >0. Luego yAx >0 y $\alpha=\beta=\dfrac{yBx}{yAx}>0$.

El lema 2.3.2 señala que para una trayectoria de crecimiento equilibrado, el factor de interés es igual al factor de crecimiento, lo que nos permite obtener la siguiente definición simplificada de solución de equilibrio de la Tecnología von Neumann:

Definición 2.3.3. Diremos que la terna (y,x,α) de $\mathbb{R}^+_m \times \mathbb{R}^+_n \times \mathbb{R}^+$ es solución de equilibrio de la Tecnología von Neumann si se satisfacen las relaciones:

$$\alpha Ax \leqslant Bx \qquad (2.16)$$

$$\alpha y A \geqslant yB \qquad (2.17)$$

$$y B x > 0 \qquad (2.18)$$

El número α se llamará factor de crecimiento de la solución de equilibrio (y,x,α).

2.3.1. Factor de crecimiento.

$$\text{Sea } \alpha(T) = \text{Sup}\left\{\alpha \in \mathbb{R} / \exists x > 0, x \in \mathbb{R}_n, \alpha Ax \leqslant Bx\right\}$$

Lema 2.3.1.1. El número $\alpha(T)$ es finito y positivo. Existe el vector semipositivo $\bar{x}$ tal que $\alpha(T)A\bar{x} \leqslant B\bar{x}$.

Demostración: Sea $P = \left\{\alpha \in \mathbb{R} / \exists\, x > 0,\ x \in \mathbb{R}_n,\ \alpha Ax \leqslant Bx\right\}$.
Probaremos que P contiene números positivos. Si $x \in \mathbb{R}_n^+$ y $x \gg 0$, de H2 resulta que $Bx \gg 0$. Luego, para α suficientemente pequeño se tiene que $\alpha Ax \leqslant Bx$, es decir, que $\alpha \in P$. Veremos que P es acotado superiormente. De H1, escogiendo un α suficientemente grande, tenemos que la suma de los elementos de cada columna de $B-\alpha A$ es negativa. Luego, si consideramos el vector fila m dimensional $e=(1 \ldots 1)$ se tiene que $e(B-\alpha A) \ll 0$, lo que implica que $e(B-\alpha A)x < 0,\ \forall x > 0$. Así, para el α elegido y cualquier $\gamma \geqslant \alpha$, no existe $x > 0$ tal que $(B-\gamma A)x \geqslant 0$. Luego $\alpha(T)$ es finito y positivo.

Sea $\left\{\alpha_k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset P$ tal que $\alpha_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha(T)$. Para todo α_k, $k=1,2,\ldots$ existe $w_k > 0$ tal que $\alpha_k Aw_k \leqslant Bw_k$ (2.19)

Si $x_k = \dfrac{w_k}{\|w_k\|}$, entonces, de 2.19 tenemos que

$$\alpha_k Ax_k \leqslant Bx_k \ ,\ k=1,2,\ldots \qquad (2.20)$$

Sea $\bar{x}$ punto límite de la sucesión acotada $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty}$. Se tiene que $\bar{x} > 0$, y aplicando límite en 2.20, se obtiene que $\alpha(T)A\bar{x} \leqslant B\bar{x}$.

Definición 2.3.1.1. Al número $\alpha(T)$ lo llamaremos factor de crecimiento (o de expansión) de la tecnología T y a cualquier vector semipositivo $\bar{x}$ que satisfaga la desigualdad $\alpha(T)\, A\, \bar{x} \leqslant B\, \bar{x}$ lo llamaremos vector de intensidad optimal.

Denotaremos con $\bar{X}$ el conjunto de los vectores de intensidad optimal. Como estos vectores son definidos por desigualdades lineales, resulta que $\bar{X} \cup \{0\}$ es un cono convexo.

Definición 2.3.1.2. Diremos que un proceso es von Neumann si es generado por un vector de intensidad optimal.

2.3.2. Existencia de soluciones de equilibrio de una Tecnología von Neumann.

Demostraremos que una Tecnología von Neumann cuyas matrices generadoras satisfacen las condiciones H1 y H2, posee soluciones de equilibrio. (La demostración original aparece en [13]).

Lema 2.3.2.1. Sea α un número mayor que cero y $\hat{x} \in \mathbb{R}_n^+$ un vector tal que

$$\alpha\, A\, \hat{x} \leqslant B\, \hat{x} \, . \qquad (2.21)$$

La condición necesaria y suficiente para que exista un vector $\hat{y}$ de $\mathbb{R}_m^+$ tal que

$$\alpha \hat{y} A \geqslant \hat{y} B \tag{2.22}$$

$$\hat{y} B \hat{x} > 0 \tag{2.23}$$

(es decir que la terna $(\hat{y}, \hat{x}, \alpha)$ sea una solución de equilibrio) es que la inecuación

$$B \hat{x} \leqslant (B-\alpha A)x, \quad x \in \mathbb{R}_n^+ \tag{2.24}$$

no admita solución.

Demostración: Supongamos que $\exists\, \hat{y} \in \mathbb{R}_m^+$ que satisface 2.22 y 2.23 y que 2.24 tiene una solución $x \in \mathbb{R}_n^+$. De 2.23 y 2.24 resulta que $0 < \hat{y} B \hat{x} \leqslant \hat{y} (B-\alpha A)x$, mientras que 2.22 implica que $\hat{y}(B-\alpha A)x \leqslant 0$. Luego 2.24 no tiene solución.

Consideremos el conjunto $Q = \left\{ z \in \mathbb{R}_m \,\middle|\, z = (B-\alpha A)x, x \in \mathbb{R}_n^+ \right\}$ que evidentemente es un cono poliédrico. Es claro que si 2.24 no tiene solución, el vector $B\hat{x}$ no pertenece al cono poliédrico $Q + \mathbb{R}_m^-$, luego, existe $\hat{y} \in \mathbb{R}_m$ tal que la forma lineal $\hat{y}\, x$ separa a $B\hat{x}$ de $Q + \mathbb{R}_m^-$; es decir, $\hat{y} B \hat{x} > 0$ y $\hat{y} p \leqslant 0$, para todo elemento p de $Q + \mathbb{R}_m^-$. Como $Q \subset Q + \mathbb{R}_m^-$ y $\mathbb{R}_m^- \subset Q + \mathbb{R}_m^-$

resulta que

$$\hat{y}(B-\alpha A)\, x \leqslant 0 \ , \ \forall \ x \in \mathbb{R}^{+}_{n} \tag{2.25}$$

$$\hat{y}\ p \geqslant 0 \qquad \forall \ p \in \mathbb{R}^{+}_{m} \tag{2.26}$$

La relación 2.25 implica que $\alpha \hat{y} A \geqslant \hat{y} B$, mientras que 2.26 implica que $\hat{y} \geqslant 0$.

Para demostrar la existencia de una solución de equilibrio usaremos la noción de soporte de un vector no negativo.

Definición 2.3.2.1. Llamaremos soporte de un vector no negativo x, y lo denotaremos "spt x", al conjunto de los índices de sus componentes positivos.

La demostración del siguiente lema es inmediata:

Lema 2.3.2.2. Sean y,z dos vectores no negativos de igual dimensión. Existe $a > 0$ tal que $y \leqslant az$ si y solo si spt $y \subseteq$ spt z.

Teorema 2.3.2.1. Si las matrices A y B satisfacen las hipótesis H1 y H2 respectivamente, entonces existe un vector $\bar{x} \in \bar{X}$ y un vector $\bar{y} \in \mathbb{R}^{+}_{m}$ tal que la terna $(\bar{y}, \bar{x}, \alpha(T))$ es una solución de equilibrio de la Tecnología von Neumann T.

Demostración: Para todo elemento $\bar{x}$ de $\bar{X}$ se cumple que $\alpha(T)A\,\bar{x} \leqslant B\,\bar{x}$. De acuerdo al lema 2.3.2.1, debe existir un vector $\bar{x} \in \bar{X}$ tal que la desigualdad

$$B\bar{x} \leqslant (B - \alpha(T)A)\,x, \quad x \in \mathbb{R}^+_n$$

no admita solución.

Supongamos lo contrario, es decir que, para todo $\bar{x} \in \bar{X}$, existe $x \geqslant 0$ tal que $B\bar{x} \leqslant (B-\alpha(T)A)\,x$. Por el lema 2.3.2.2, para todo $\bar{x} \in \bar{X}$, existe $x \geqslant 0$ tal que

$$\text{spt } B\bar{x} \subseteq \text{spt } (B - \alpha(T)A)\,x.$$

Consideremos los vectores x_j para todo $j \in I$ definidos de la siguiente forma: $x_j = x$ si existe $x \in \bar{X}$ tal que la j-ésima componente de $(B-\alpha(T)A)x$ es positiva y $x_j = 0$ en caso contrario.

Sea $\tilde{x} = \frac{1}{m}(x_1+\ldots+x_m)$. Tenemos que $\tilde{x} \in \bar{X}$ y que

$\text{spt } (B-\alpha(T)A)x \subseteq \text{spt } (B-\alpha(T)A)\,\tilde{x}$, para todo $x \in \bar{X}$ (por la forma como se construyó $\tilde{x}$).

Por hipótesis existe $x \geqslant 0$ tal que

$$B\tilde{x} \leqslant (B-\alpha(T)A)x.$$

Como $B\tilde{x}$ es mayor o igual que cero, resulta, de la definición 2.3.1.1, que $x \in \bar{X}$.

De igual manera $\text{spt } B\tilde{x} \subseteq \text{spt}(B-\alpha(T)A)x$, de donde obtenemos que spt $B\tilde{x} \subseteq$ spt$(B-\alpha(T)A)\tilde{x}$ por transitividad.

Luego, por el lema 2.3.2.2, existe el número a mayor que cero tal que $B\tilde{x} \leqslant a\,(B-\alpha(T)A)\tilde{x}$ (2.27)

La relación 2.27 se mantiene válida se reemplazamos a por b, con $b > a$ y $b > 1$.

Luego $b\,\alpha(T)A\tilde{x} \leqslant (b-1)B\tilde{x}$ o sea, $\frac{b}{b-1}\,\alpha(T)A\,\tilde{x} \leqslant B\,\tilde{x}$ (2.28)

Como $\frac{b}{b-1}\,\alpha(T) > \alpha(T)$, la relación 2.28 contradice la definición de $\alpha(T)$.

Corolario 2.3.2.1. Bajo las hipótesis H1 y H2, existe una trayectoria de crecimiento equilibrado maximal, o sea, una trayectoria de crecimiento equilibrado cuyo factor de crecimiento coincide con el factor de crecimiento de la tecnología.

2.4.- Solución de equilibrio de una Tecnología Leontief

Definición 2.4.1. A una tecnología von Neumann en la que el número de los bonos coincide con el de los procesos elementales, cada bono es salida de un proceso elemental y cada proceso elemental tiene como salida un solo bono, la llamaremos Tecnología Leontief.

Para simplificar las expresiones, hemos considerado que cada proceso ha sido numerado con el índice del bono que él produce y al nivel de intensidad del funcionamiento de cada proceso elemental lo hemos identificado con el incremento de su salida. La Tecnología Leontief aparece entonces como una Tecnología von Neumann en que n=m y B es igual a la matriz unitaria I_n de orden n. Los coeficientes a_{ij} de A muestran qué cantidad del bono B_i se necesita para producir una unidad del bono B_j.

De acuerdo con la definición 2.3.3, una terna (y,x,α) con $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $x,y \in \mathbb{R}^+_n$ es una solución de equilibrio de la Tecnología Leontief generada por A, si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$A\,x \leqslant x \tag{2.29}$$

$$y\,A \geqslant y \tag{2.30}$$

$$y\,x > 0 \tag{2.31}$$

El siguiente teorema muestra la relación entre las soluciones de equilibrio de la Tecnología Leontief y los valores propios positivos de la matriz A que la genera.

Teorema 2.4.1. Sea A la matriz de entrada de una Tecnología Leontief T. Se cumple que:

i) Si α es el factor de crecimiento de una solución de equilibrio de T dada, entonces $\frac{1}{\alpha}$ es un valor propio de A al que le corresponde un vector propio semipositivo.

ii) Si $\hat{x} \in \mathbb{R}_n^+$ es un vector propio de la matriz A correspondiente a un valor propio $\frac{1}{\alpha} > 0$, entonces existe un vector $y \in \mathbb{R}_n^+$ tal que la terna $(y, \hat{x}, \alpha)$ es una solución de equilibrio de T.

Demostración:

i) Sea (y, x, α) una solución de equilibrio de la Tecnología Leontief T. Se satisfacen entonces las condiciones 2.29, 2.30 y 2.31. Consideremos las sucesiones:

$$x,\ \alpha Ax,\ \alpha^2 A^2 x, \ldots, \alpha^k A^k x, \ldots \qquad (2.32)$$

$$y,\ \alpha yA,\ \alpha^2 y A^2, \ldots, \alpha^k yA^k, \ldots \qquad (2.33)$$

$$yx, \alpha yAx,\ \alpha^2 y A^2 x, \ldots, \alpha^k y A^k x, \ldots \qquad (2.34)$$

De 2.29 se deduce que la sucesión 2.32 es no creciente, de 2.30, que la sucesión 2.33 es no decreciente y la sucesión 2.34 es constante puesto que es no decreciente y no creciente. Por otro lado la sucesión 2.32 (de elementos no negativos) es convergente. Sea $\hat{x}$ su límite cuando k tiende al infinito.

Si observamos que

$$\hat{x} = \lim_{k\to\infty} \alpha^k A^k x = \alpha A(\lim_{k\to\infty} \alpha^{k-1} A^{k-1} x) = \alpha A\hat{x} \qquad (2.35)$$

se tiene que $A\hat{x} = \frac{1}{\alpha}\hat{x}$

Aplicando límite a la sucesión 2.34, considerando 2.35, 2.31 y el hecho de que la sucesión es constante, resulta que

$$y\hat{x} = yx > 0 \qquad (2.37)$$

de modo que $\hat{x} > 0$.

Luego, $\frac{1}{\alpha}$ es un valor propio de A y $\hat{x}$ su vector propio semipositivo correspondiente.

ii) Sea $\hat{x} \in \mathbb{R}_n^+$ un vector propio de A correspondiente a un valor propio $\frac{1}{\alpha} > 0$, o sea, $\alpha A\hat{x} = \hat{x}$.

Supongamos que no existe $y \in \mathbb{R}_n^+$ talque $(y, \hat{x}, \alpha)$ sea solución de equilibrio de T. Por el lema 2.3.2.1 existe $x \in \mathbb{R}_n^+$ tal que $\hat{x} \leqslant x - \alpha Ax$

es decir que $\hat{x} + \alpha A x \leqslant x$ (2.38)

Multiplicando la desigualdad 2.38 a izquierda por αA y sumando el vector $\hat{x}$, se obtiene que

$$2\hat{x} + \alpha^2 A^2 x \leqslant x$$

Luego de efectuar esta operación k veces, resulta que

$$k\hat{x} + \alpha^k A^k x \leqslant x$$

Es decir que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $k\,\hat{x} \leqslant x$.
Esta desigualdad se satisface si y solo si $\hat{x} = 0$, lo cual contradice el hecho de que $\hat{x}$ es vector propio de A.

Estudiaremos la existencia de soluciones de equilibrio en tecnologías Leontief, desde el punto de vista de la constitución de sus matrices de entrada.

<u>Definición 2.4.2</u>. Sea $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ una matriz no negativa de orden n. Diremos que A es <u>no-fraccionable</u> si para cualquier par de índices (i,j) existen índices $j_1, j_2, \ldots, j_p$ tales que

$$a_{ij_1} > 0,\ a_{j_1 j_2} > 0, \ldots\ a_{j_p j} > 0 \qquad (2.39)$$

<u>Definición 2.4.3</u>. Llamaremos <u>Tecnología Leontief no-fraccionable</u> a aquella cuya matriz de entrada es no-fraccionable.

Una interpretación económica de la situación es la siguiente: si para dos índices p y q tenemos que $a_{pq} > 0$, entonces el bono B_p es directamente utilizado en la producción del bono B_q.

Es claro entonces que en una Tecnología Leontief no-fraccionable, cada bono es usado (eventualmente por medio de otro bono) en la producción de cualquier otro bono.

Los siguientes lemas garantizarán la existencia de soluciones de equilibrio:

Lema 2.4.1. Sea A una matriz no-fraccionable, $x \in \mathbb{R}^n$ y $x \geqslant 0$. Si $Ax = 0$ entonces $x=0$.

Demostración: Siendo $Ax = 0$, cumple también que $A^p x=0$ para todo entero p mayor que uno. Supongamos que $x \neq 0$, entonces existe al menos una componente $x_j > 0$ con $j \in I$.

Consideremos además el índice i, $i \in I$. Como A es no-fraccionable, existen los índices $j_1, j_2, \ldots, j_t$ tales que $a_{ij_1} > 0$, $\ldots$ $a_{j_t j} > 0$. Luego el producto $a_{ij_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_t j} x_j$ es estrictamente mayor que cero.

En consecuencia,

$$(A^t x)_i = \sum_{h_1=1}^{n} \sum_{h_2=1}^{n} \cdots \sum_{h_{t-1}=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ih_1} a_{h_1 h_2} \ldots a_{h_{t-1} k} x_k > 0$$

lo cual es una contradicción.

Lema 2.4.2. Para toda matriz no-fraccionable A existe un número positivo λ y un vector semipositivo x tal que $Ax = \lambda x$.

Demostración: Consideremos el C-conjunto

$$S = \left\{ x/x \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

Teniendo en cuenta el lema 2.4.1 y que A es no negativa, resulta que si $x \in S$, entonces el vector $Ax / \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i$ es también elemento de S.

Se define asi la función continua f de S en sí mismo tal que $f(x) = Ax / \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i$, la cual nos permite, conforme al teorema de punto fijo de Brower, garantizar la existencia de un elemento x de S tal que

$$f(x) = \frac{Ax}{\sum_{i=1}^{n} (Ax)_i} = x$$

Denotando $\lambda = \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i$, se tiene que

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda > 0, \quad x > 0.$$

<u>Lema 2.4.3.</u> Para toda matriz no-fraccionable A, si λ es un número positivo y si existe $x \geqslant 0$ tal que $Ax = \lambda x$, entonces $x = 0$ ó $x \gg 0$.

<u>Demostración:</u> Sea $x \geqslant 0$ tal que $Ax = \lambda x$. Entonces también $A^p x = \lambda^p x$ para todo entero p mayor que 1.

Supongamos que el vector x es distinto de cero y no positivo. Entonces existen los índices $j \in I$, $i \in I$ tales que $x_j > 0$ y $x_i = 0$ respectivamente.

Como A es no-fraccionable, existen los índices $j_1, \ldots, j_t$ tales que $a_{ij_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_t j} x_j > 0$

Luego $x_i = \frac{1}{\lambda^t} (A^t x)_i = \frac{1}{\lambda^t} \sum_{h_1=1}^{n} \ldots \sum_{h_{t-1}=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ih_1} \ldots a_{h_{t-1}k} x_k$

es mayor que cero, lo cual es una contradicción.

El lema 2.4.1 nos dice que a un vector propio no negativo de la matriz no-fraccionable A, le corresponde un valor propio positivo y los lemas 2.4.2 y 2.4.3 muestran la existencia de un vector propio positivo x y del valor propio positivo λ correspondiente.

La existencia de vectores y valores propios positivos de una matriz no fraccionable (lemas 2.4.2 y 2.4.3) y la parte ii) del teorema 2.4.1, garantizan la existencia de soluciones de equilibrio en una Tecnología Leontief no-fraccionable.

En forma más general, para una Tecnología Leontief no necesariamente no-fraccionable, puesto que $B = I_n$, la condición H2 siempre se satisface. Luego, si A satisface la hipótesis H1, entonces, por el teorema 2.3.2.1, la Tecnología Leontief asignada admite solución de equilibrio.

Como consecuencia de los teoremas 2.3.2.1 y 2.4.1 se tiene lo siguiente:

Corolario 2.4.1. Una matriz cuadrada cuyas columnas son vectores semipositivos admite por lo menos un valor propio positivo, al cual le corresponde un vector propio semipositivo.

2.5.- Crecimiento eficiente en el modelo von Neumann.

El concepto de crecimiento eficiente es uno de los más importantes en la teoría moderna de crecimiento económico. Trataremos esta noción dentro del marco del modelo von Neumann, donde puede ser abordado con ayuda de la teoría de

Dualidad de la Programación Lineal.

Consideraremos que el intervalo de planificación es de N períodos. Denotaremos con $x(t)$, $t=1,\ldots,N$ los vectores de intensidad de los procesos elementales para cada uno de los períodos y con $z(0) \in \mathbb{R}_m^+$ el vector que representa la existencia de bonos en la economía en el período inicial.

Supongamos que las matrices de entrada y salida A y B satisfacen las hipótesis H1 y H2 respectivamente. La condición 2.1, que señala la relación entre la entrada de cualquier bono para un período y su salida en el período anterior, quedará expresada de la siguiente manera:

$$Ax(1) - z(0) \leqslant 0 \qquad (2.40)$$

$$Ax(t) - B\,x(t-1) \leqslant 0, \quad t=2,\ldots,N \qquad (2.41)$$

$$x(t) \geqslant 0 \qquad , \quad t=1,\ldots,N \qquad (2.42)$$

<u>Definición 2.5.1</u>. Llamaremos <u>programa de producción</u> o <u>programa</u> el conjunto de vectores $\left\{x(t)\right\}_{t=1}^{N}$ que satisfaga las condiciones 2.40, 2.41 y 2.42.

Tenemos que el conjunto de vectores $\left\{x(t)=0\right\}_{t=1}^{N}$ es un programa, luego el conjunto G de los programas de producción es no vacío. Seguidamente veremos que G es acotado y cerrado.

Sea $\{x(t)\}_{t=1}^{N} \in G$. Por H1, para todo $j \in J$, existe i tal que $a_{ij} \neq 0$, luego, por 2.40 $x_j(1) \leqslant \frac{z_i(0)}{a_{ij}} = C_j(1)$

Sea $t \in \{2,\ldots,N\}$. Por H2, para todo $i \in I$, existe k tal que $b_{ik} \neq 0$, en consecuencia $b_{ik}x(t-1) \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t-1)$ y por 2.41, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t-1)$, de donde, por H1, para todo $j \in J$,

$$x_j(t) \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t-1)}{a_{pj}} = C_j(t), \text{ con } a_{pj} \neq 0$$

Tomando un $\varepsilon = \operatorname{Max} \{C_j(t)\}_{\substack{j \in J \\ t=1,\ldots N}}$ resulta que G estará contenido en la bola abierta de centro 0 y radio ε del espacio $\mathbb{R}_{nxN}$.

Por otro lado, considerando una sucesión convergente de elementos de G, se verifica (sin dificultad) que G es cerrado.

Trataremos diversos modos de comportamiento de los programas de producción $\left\{x(t)\right\}_{t=1}^{N}$ desde el punto de vista del conjunto de bonos $Bx(N)$ que se obtiene en sus salidas finales.

Si consideramos a $y \in \mathbb{R}_m^+$ como el vector de precios de los bonos al final del período N, entonces (por 2.40-2.42), el programa que ofrece el mayor valor a la salida final es solución al problema de programación lineal:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max} & yBx(N) \\ \text{sujeto a} & Ax(1) - z(0) \leqslant 0 \\ & Ax(t) - Bx(t-1) \leqslant 0, \; t=2,\ldots,N \\ & x(t) \geqslant 0 \quad , \quad t=1,\ldots,N \end{array}\right\} \qquad (2.43)$$

Como el conjunto G de los programas es compacto, este problema admite solución óptima.

<u>Definición 2.5.2</u>. Llamaremos programa y-óptimo a una solución óptima del problema 2.43.

<u>Teorema 2.5.1</u>. Un programa $\left\{x^*(t)\right\}_{t=1}^{N}$ es y-óptimo si y solo si existen N+1 vectores m-dimensionales $y^*(1),\ldots,y^*(N+1)$ que satisfacen las condiciones:

a) $y^*(t) \geqslant 0$, $t=1,\ldots,N+1$

b) $y^*(t)\, A - y^*(t+1)B \geqslant 0$, $t=1,\ldots,N$

c) $\left[y^*(t)\, A - y^*(t+1)B\right] x^*(t) = 0$, $t=1,\ldots,N$

d) $y^*(1)\, \left[Ax^*(1)-z(0)\right] = 0$

e) $y^*(t)\, \left[Ax^*(t)-Bx^*(t-1)\right] = 0$, $t=2,\ldots,N$

f) $y^*(N+1) = y$

Demostración: Recordemos el siguiente teorema de la teoría de dualidad de la Programación Lineal:

Teorema de Equilibrio de la Programación Lineal

Sean x^* e y^* soluciones admisibles de los problemas primal y dual respectivos:

$$P'' \begin{cases} \text{Max } c'x \\ \text{sujeto a } Mx \leqslant b \,, \\ \qquad\qquad x \geqslant 0 \end{cases} \qquad\qquad D'' \begin{cases} \text{Min } yb \\ \text{sujeto a } yM \geqslant c' \\ \qquad\qquad y \geqslant 0 \end{cases}$$

x^* e y^* son soluciones óptimas de P" y D"(respectivamente) si solo si satisfacen las condiciones de holgura complementaria:

$$y^*(Mx^* - b) = 0$$

$$(y^* M - c')x^* = 0$$

Desglosando el problema 2.43, resulta:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Max} & yBx(N) & \\
\text{sujeto a} & Ax(1) & \leqslant z(0) \\
 & -Bx(1) + Ax(2) & \leqslant 0 \\
 & \quad -Bx(2)+Ax(3) & \leqslant 0 \\
 & \qquad \vdots & \\
 & \qquad -Bx(N-1)+Ax(N) & \leqslant 0 \\
 & x(1),\dots,x(N) \geqslant 0 &
\end{array}\right\} (2.44)$$

Su dual es el problema:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Min} & y(1)z(0) & \\
\text{sujeto a} & y(1)A-y(2)B & \geqslant 0 \\
 & \quad y(2)A-y(3)B & \geqslant 0 \\
 & \qquad \vdots & \\
 & \qquad y(N-1)A-y(N)B & \geqslant 0 \\
 & y(1),\dots,y(N) \geqslant 0 &
\end{array}\right\} (2.45)$$

Sea $\left\{x(t)\right\}_{t=1}^{N}$ un programa y-óptimo, y por lo tanto una solución óptima de 2.44. Por el Teorema de Dualidad de la Programación Lineal (sec.1.2.1), podemos elegir una solución óptima $y^*(1),\dots,y^*(N)$ del dual 2.45. Haciendo $y^*(N+1)=y$, las condiciones de a) -e) se verifican inmediatamente. En efecto: a) y b) son las condiciones de admisibilidad de 2.45, mientras que c), d) y e) resultan de las condiciones de holgura complementaria del Teorema de Equilibrio de la Programación Lineal.

Recíporocamente, si $\left\{x^*(t)\right\}_{t=1}^{N}$ es un programa, entonces satisface las condiciones de 2.44. Sea $y^*(1),\ldots,y^*(N+1)$ un conjunto de vectores que satisfacen las propiedades a) f). De a), b) y f) se tiene que $y^*(1),\ldots,y^*(N)$ es solución admisible de 2.45. Las relaciones c), d) y e) representan las condiciones de holgura complementaria. Luego, por el Teorema de Equilibrio de la Programación Lineal, se deduce que $\left\{x^*(t)\right\}_{t=1}^{N}$ es solución óptima de 2.44 y $\left\{y^*(t)\right\}_{t=1}^{N}$ solución óptima del dual. Por lo tanto, $\left\{x^*(t)\right\}_{t=1}^{N}$ es un programa y-óptimo.

Otro comportamiento de los programas de producción con respecto a la salida final se basa en el concepto de programa eficiente.

<u>Definición 2.5.3</u>. Sean $\left\{x'(t)\right\}_{t=1}^{N}$ y $\left\{x''(t)\right\}_{t=1}^{N}$ dos programas de producción. Diremos que $\left\{x'(t)\right\}_{t=1}^{N}$ es <u>más eficiente que</u> $\left\{x''(t)\right\}_{t=1}^{N}$ si $B\,x'(N) > B\,x''(N)$ y que un programa $\left\{x^*(t)\right\}_{t=1}^{N}$ es <u>eficiente</u> si no existe otro programa más efi-

ciente que él.

Como consecuencia se tiene que, para un programa eficiente, no se puede aumentar la salida final a ninguno de los bonos en un proceso sin disminuir su salida final en alguno de los otros procesos. Presentaremos algunos resultados que garantizan la existencia de un programa eficiente.

<u>Lema 2.5.1</u>. Consideremos el vector $y \in \mathbb{R}_m^+$, $y \gg 0$. Cualquier programa y-óptimo es eficiente.

<u>Demostración</u>: Sea $\{x^*(t)\}_{t=1}^N$ un programa y-óptimo. Supongamos que este programa no es eficiente. Existe entonces un programa $\{x(t)\}_{t=1}^N$ tal que $Bx(N) > Bx^*(N)$. Como $y \gg 0$ resulta que $y\,Bx(N) > y\,B\,x^*(N)$, lo que contradice que $\{x^*(t)\}_{t=1}^N$ es y-óptimo.

<u>Corolario 2.5.1</u>. En el conjunto G de los programas de producción existe un programa eficiente. En efecto, para todo $y \in \mathbb{R}_m^+$ existe un programa y-óptimo, entonces por el lema anterior, existe un programa eficiente.

<u>Lema 2.5.2</u>. El programa $\{x^*(t)\}_{t=1}^N$ es eficiente si y solo

si el valor óptimo del problema de programación lineal

$$\text{Max} \quad ew \tag{2.46}$$

$$\text{sujeto a} \quad Ax(1) \leqslant z(0) \tag{2.47}$$

$$Ax(t) - Bx(t-1) \leqslant 0, \ t=1,\dots,N \tag{2.48}$$

$$-Bx(N) + w \leqslant -Bx^*(N) \tag{2.49}$$

$$w \geqslant 0, \ x(t) \geqslant 0, \ t=1,\dots,N \tag{2.50}$$

es cero, donde e es el vector fila m dimensional con todas sus componentes iguales a uno y $w \in \mathbb{R}_m$.

<u>Demostración</u>: Tenemos que el programa $\{x^*(t)\}_{t=1}^N$ y $w=0$ constituyen una solución admisible que da a la función objetivo el valor cero. Como el conjunto de soluciones de 2.47, 2.48 y 2.42 es compacto, el conjunto de las soluciones admisibles de 2.47-2.50 también lo es. Supongamos que el programa $\{x^*(t)\}_{t=1}^N$ es eficiente y que el valor óptimo del problema 2.46-2.50 es positivo con $\{\bar{x}(t)\}_{t=1}^N$, $\bar{w}$ como una solución optimal. Entonces $\bar{w} > 0$. Por 2.47 y 2.48, $\{\bar{x}(t)\}_{t=1}^N$ es un programa. De 2.49 se deduce que $B\bar{x}(N) - Bx^*(N) = \bar{w} > 0$, lo que contradice que $\{x^*(t)\}_{t=1}^N$ es eficiente.

Reciprocamente, supongamos que el valor optimal del problema 2.46-2.50 es cero y que el progrma $\{x^*(t)\}_{t=1}^N$ no es eficiente. Entonces existe el programa $\{\tilde{x}(t)\}_{t=1}^{N}$ tal que $B\,\tilde{x}(N) > B\,x^*(N)$. Sea entonces $\tilde{w}=B\tilde{x}(N)-Bx^*(N) > 0$. Resulta que $\{\tilde{x}(t)\}_{t=1}^{N}$, $\tilde{w} > 0$ es una solución admisible del problema, con $e\,\tilde{w} > 0$, en contradicción con el hecho de que max $ew=0$.

<u>Teorema 2.52</u>. El programa $\{x^*(t)\}_{t=1}^{N}$ es eficiente si y solo si existen vectores m-dimensionales $y^*(1),\ldots,y^*(N+1)$ que satisfacen las condiciones:

1) $y^*(t) \geqslant 0,\ t=1,\ldots,N,\ y^*(N+1) \gg 0$

2) $y^*(t)A - y^*(t+1)B \geqslant 0\ ,\ t=1,\ldots,N$

3) $\left[y^*(t)A-y^*(t+1)B\right]\ x^*(t)=0,\ t=1,\ldots,N$

4) $y^*(1)\left[Ax^*(1)-z(0)\right] = 0$

5) $y^*(t)\ \left[Ax^*(t) - Bx^*(t-1)\right] =0,\ t=2,\ldots,N$

<u>Demostración</u>: Supongamos que para el programa $\{x^*(t)\}_{t=1}^{N}$ existen vectores $y^*(t), t=1,\ldots N+1$ que satisfacen las condiciones 1)-5), entonces por el teorema 2.5.1, este programa es $y^*(N+1)$-óptimo. Como $y^*(N+1) \gg 0$, por el lema 2.5.1, este programa es eficiente.

Recíprocamente, supongamos que el programa $\left\{x^{*}(t)\right\}_{t=1}^{N}$ es eficiente. Del lema 2.5.2, los vectores $x^{*}(1),\ldots,x^{*}(N)$, $w=0$ son una solución óptima del problema 2.46-2.50, cuyo problema dual es

$$\operatorname{Min}\left[y(1)z(0)-y(N+1)Bx^{*}(N)\right]$$

sujeto a $\quad y(t)A-y(t+1)B\geqslant 0,\ t=1,\ldots,N$

$$y(N+1)\geqslant e$$

$$y(t)\geqslant 0,\ t=1,\ldots,N+1$$

Sea $y^{*}(1),\ldots,y^{*}(N+1)$ una solución óptima de este problema. Se verifica que

$$y^{*}(t)A-\ y^{*}(t+1)B\geqslant 0,\ t=1,\ldots,N$$

$$y^{*}(N+1)\geqslant e$$

$$y^{*}(t)\geqslant 0,\ t=1,\ldots,N$$

y además las condiciones de holgura complementaria:

$$y^{*}(t)A-\ y^{*}(t+1)Bx^{*}(t)=0,\ t=1,\ldots,N$$

$$\left[y^{*}(t+1)\ -\ e\right]0\ =\ 0$$

$$y^{*}(1)\ \left[Ax^{*}(1)-z(0)\right]\ =0$$

$$y^{*}(t)\ \left[Ax^{*}(t)-Bx^{*}(t-1)\right]\ =0,t=2,\ldots,N$$

$$y^{*}(N+1)\ \left[-Bx^{*}(N)+0+Bx^{*}(N)\right]\ =0$$

Como el hecho de que $y^{*}(N+1) \geqslant e$ implica que $y^{*}(N+1) \gg 0$, las condiciones 1)-5) se verifican.

<u>Corolario 2.5.2</u>. Un programa es eficiente si y solo si existe el vector $y \gg 0$ tal que este programa es y-óptimo. En efecto, la condición suficiente es el lema 2.5.1, mientras que la necesaria se deduce de los teoremas 2.5.1 y 2.5.2.

C O N C L U S I O N E S

Para determinar la existencia de soluciones del dual de un problema cualquiera de optimización cóncava con una entrada dada y con óptimo, en el que se desee la maximización de utilidades, basta demostrar que para ese punto de entrada, su función de valor asociada es finita y admite subgradiente.

Particularmente si el problema es de programación cóncava, la entrada dada constituye el vector de términos libres. Bajo el supuesto de que este problema tiene solución óptima, la existencia de soluciones del dual se garantiza también demostrando que el problema satisface la condición de Slater y que la función de valor asociada es finita en ese vector. Más aún, si el problema es de programación lineal, por el teorema de Dualidad, el problema dual también admite solución. En este caso particular de la programación cóncava, la entrada fija se puede interpretar como recursos o factores de producción y los multiplicadores optimales (soluciones del problema dual lagrangeano), como los precios de esos recursos y como indicadores de la sensibilidad del valor óptimo del primal a los cambios en la disponibilidad de los recursos.

En el marco del sistema D (sección 2.1), John von Neumann plantea un modelo cerrado (de entrada y producción de bonos) en el que considera el estado de crecimiento equilibrado donde los niveles de intensidad de los procesos elementales crecen o decrecen de un período a otro en progresión geométrica con igual razón y los precios de los bonos y la rata de interés son invariantes en el tiempo. Este modelo tiene solución bajo la condición de que todo bono participe en todo proceso en cantidades positivas, ya sea como producto o como materia prima (condición 2.6). Por otra parte, bajo las hipótesis de que cualquier proceso utilice al menos un bono y que cualquier bono sea realizado por lo menos de un proceso elemental (condiciones H1 y H2), también existe solución al mismo modelo. En forma particular, si el modelo de von Neumann es de Leontief, existe solución si se satisfacen las dos hipótesis anteriores y además el hecho de que todo bono sea usado (directa o indirectamente) en la producción de cualquier otro bono (definición 2.4.2).

Concibiendo la planificación integral del sistema económico y comparando los programas de producción en cuanto a su eficiencia, se verifica la existencia de un programa eficiente (definición 2.5.3) en el que para aumentar la salida final de algún bono en un proceso se tendría que disminuir su salida final en al menos uno de los otros procesos.

B I B L I O G R A F I A

[1] Afriat, S.N. — The Output Limit Function in General and Convex Programming and the Theory of Production. Econometrica. Vol 39. 1971.

[2] Arrow, Kenneth. — General Economic Equilibrium: Purpose, Analytic Techniques, Collective Choice. The American Economic Review. 1974. (Premio Nobel de Ciencias Económicas), Estocolmo. 1972.

[3] Bazaraa, Mokhtar and Shetty, C.M. — Nonlinear Programming. Theory and Algorithms. John Wiley and Sons. 1970.

[4] Craiu, Mariana şi Tănase, Vasile — Analiză Matematică. Editura Didactica şi Pedagogică Bucureşti. 1980.

[5] Cruceanu, Ştefan — Introducere în Teoria Matematică a Modelelor de Creştere de Tip von Neumann. Editura Academiei. Bucureşti. 1978.

[6] Cruceanu, Ştefan şi Vărsan, C. — Elemente de Control Optimal şi Aplicaţii în Economie. Seria Basele Matematice ale Cercetării Operaţionale. Editura Tehnică. Bucureşti. 1978.

[7] Champernowne, D. — A Note on J. von Neumann's Article on "A Model of Economic Equilibrium. Review of Economic Studies. 1975.

[8] Dieudonné — Fundamentos de Análisis Moderno. Editorial Reverté. 1960.

[9] Gale, D. — On Optimal Development in a Multi-Sector Economy. Review of Economic Studies. 1967.

[10] Hiilsmann, J. and Steinmetz, V. — A Note on the Nonexistence of Optimal Price Vectors in the General Balanced - Growth Model of Gale. Econometrica. Vol. 40. 1972.

[11] Koopmans, T.C. — Economic Growth at a Maximal Rate. Quaterly Journal of Economics. Vol. 78. 1964.

[12] Lasdon, Leon S. — Teoria Optimizării Sistemelor Mari. Editura Tehnica. Bucareşti. 1975.

[13] Los, J. — A Simple Proof of the Existence of Equilibrium in a von Neumann Model and Some of its Consequences. Bull. Acad. Sci. Pob. 1971.

[14] Luenberger, David — Introduction to Linear and Nonlinear Programming. Addison-Wesley Pub. Company. 1973.

[15] Von Neumann, J. — A Model of General Economic Equilibrium. Review of Economic Studies. 1946.

[16] Nikaido, Hukukane. Persistence of Continual Growth near the von Neumann Ray: a Strong Version of the Radner Turnpike-Theorem. Econometrica. Vol. 32. 1964.

[17] Popescu, H. şi Chiroiu, V. Calculul Structurilor Optimale Editura Academiei. 1981.

[18] Ştefănescu, Anton Curs de Cercetări Operaţionale Bucureşti. 1982.

[19] Udrişte C. şi Tănăsescu, E. Minime şi Maxime ale funcţiilor reale de variabile reale. Editura Tehnica. Bucureşti. 1981.